I Математика, измерение и психофизика[1]

С. С. СТИВЕНС

(Гарвардский университет)

Зрелость науки обычно измеряется тем, в какой мере она использует математику. Сама же математика не является наукой в эмпирическом смысле, но представляет собой формальную логическую, символическую систему, своего рода игру знаков и правил. Достоинство математики, благодаря которому она стоит выше обыденного, заключается в ее способности служить моделью событий и отношений, имеющих место в эмпирическом мире. Подобно всяким моделям, используемым для того, чтобы репрезентировать нечто отличающееся от них самих, математика «пригодна» для моделирования одних явлений лучше, чем других, но полного соответствия между математической моделью и эмпирическими переменными материального мира не бывает никогда. Вообще говоря, это соответствие тем полнее, чем в большей степени количественные характеристики и качества изучаемых нами вещей поддаются измерениям при помощи хорошо рассчитанных шкал. Когда описание открывает путь для измерений, дискуссии вполне заменяются вычислениями.

Если это так, то измерение имеет отношение и к психологии. Однако оно остается лишь весьма далеким от реализации желанием для тех областей науки, в которых исследователь сталкивается с непредвиденной сложностью изучаемого объекта и в которых основные специфические черты последнего открываются только проницательному и смелому уму. Измерение является непосредственной целью скорее в области эксперимента, после того как тщательный анализ фактов и отношений уже привел к установлению некоторых существенных переменных.

Измерение — предмет особого внимания психофизики, причем не только психофизики в узком смысле слова, но и в более старом и широком ее понимании как науки, стремящейся раскрыть закономерности ответов организма на влияние энергетических формообразований окружающей его среды. Как мы увидим из последующего изложения, психофизика в таком понимании содержит семь основных проблем.

Всякое измерение относительно. Оно варьирует по виду и степени, по типу и точности. Измерение в самом широком смысле есть припи-

[1] При работе над данным разделом автор учел те критические замечания, которые были сделаны его доброжелательными коллегами. С наибольшим вниманием ее просмотрели Э. Г. Боринг, Г. А. Миллер, Ф. Ч. Фрик и Ф. Мостелер; однако ответственность за оставшиеся недочеты лежит не на них.

Этот раздел подготовлен психо-акустической лабораторией Гарвардского университета.

сывание числовых форм[1] объектам или событиям в соответствии с определенными правилами. А тот факт, что числовые формы могут быть приписаны объектам в соответствии с различными правилами, приводит к использованию различных шкал и различных видов измерений. Сами правила в некоторой их части относятся к конкретным эмпирическим операциям, осуществляемым при проведении экспериментов. Эти обладающие различной степенью точности правила помогают нам определить, в какой мере математическая модель соответствует тому, что она репрезентирует.

Измерение возможно прежде всего только потому, что существует некоторого рода изоморфизм эмпирических отношений между объектами и событиями, с одной стороны, и, с другой — свойств формальной «игры», в которой числовые формы являются «пешками», а операции — «ходами». Если это соответствие между формальной моделью и эмпирическим объектом, который она репрезентирует, оказывается строгим и точным, то мы можем раскрыть истину относительно самого предмета изучения, исследуя лишь его модель. Так, например, мы рассчитываем траекторию пули или кометы, не вступая в какое-либо непосредственное соприкосновение с ними самими. При этом мы испытываем благоговение перед поразительной силой математики, позволяющей нам познавать то, что лежит за пределами нашего собственного поля восприятия.

В этой присущей математике силе древние видели мистическое начало — доказательство того, что числа управляют космосом[2]. Напротив, для современного человека, который сам создает себе богов, математика является его собственным изобретением, подобно языку или шахматам; современный человек не только соблюдает определенные правила, но и создает их. Несомненно, что значительной части математиков (но отнюдь не всем) эти правила представляются преднамеренно подогнанными таким образом, чтобы они были изоморфны обыденному жизненному опыту; так, например, тот факт, что десять бобов, сложенные с десятью другими бобами, образуют двадцать бобов, выражается посредством символов, как $10+10=20$. Интересно, однако, отметить, что значительная часть того, что мы называем математикой, не изоморфна никакой известной реальности и в этом смысле является бесполезной для научной практики.

Тем не менее ученые изучают структуру математики, потому что она представляет собой тот язык, на котором они развивают свои точные высказывания. Излагая эту мысль в упрощенной «для популярности» форме, Хогбен пишет, что математика — это язык *величин*, в то время как, например, английский язык является языком *качеств*. Во всяком случае, математика представляет собой (это знает теперь каждый школьник) специализированный язык, обладающий богатым и строгим синтаксисом. Но всякому психологу известно также и то, что невозможно изложить математический синтаксис в пределах одной главы. Задача, которую мы здесь перед собой ставим, ограничена попыткой объяснить, каким образом математический синтаксис служит моделью, репрезентирующей эмпирические операции. Мы можем привести некоторые соображения *относительно* математики, не будучи большими специалистами в искусстве ее применения[3].

[1] Автор употребляет слово «numeral» (буквально — «числительное»). Мы даем перевод — «числовая форма», учитывая *логическое* содержание данного термина (см. стр. 50 настоящего издания). — *Прим. ред.*

[2] Сказанное относится не ко всей древней науке, а лишь к определенным ее направлениям, прежде всего к *пифагорейцам*. — *Прим. ред.*

[3] По вопросу о применении математики в психологии см. работу: Л ь ю и с, 1948.

СИНТАКТИКА, СЕМАНТИКА И ПРАГМАТИКА

Когда мы рассматриваем природу языка и его использование — безразлично, языка математики или какого-либо другого, — принято различать три области исследования[1]:

1) синтактику, изучающую отношения между знаками;

2) семантику, изучающую отношение знаков к объектам;

3) прагматику, изучающую отношение знаков к тем, кто ими пользуется.

Примеры см. в табл. 1.

Таблица 1

Примеры из трех областей (уровней) исследования языка

Уровни	Примеры
Синтактика	*Правила алгебры*: $a^2 = a \times a = \sqrt{a^4} = a^6 \times a^{-4}$ и т. д.
	Правила пунктуации:
	Без знаков препинания: То что есть есть того чего нет нет это не то это то
	Со знаками препинания: То, что есть, есть; того, чего нет, нет. Это не то? Это то.
Семантика	*Геометрия*: Пусть h — длина гипотенузы прямоугольного треугольника.
	Объекты: „Квадрат“ — это название для фигуры □.
	Метаязык: Слово „лошадь“ — существительное.
Прагматика	*Пропаганда*: Слово „прогрессивный“ для большинства людей является хорошим словом.
	Употребление: Образованные люди не говорят **„нету“**.
	Идиоматика: Предложение „Своя рубашка ближе к телу“ — плохая идиома.
	Оскорбление: Слово „ниггер“ оскорбительно для негра.

Синтактика имеет дело с формальными дисциплинами, такими, как логика, математика или синтаксис, в которых отношения между знаками *абстрагированы* от отношений знаков к объектам и к лицам, употребляющим эти знаки или интерпретирующим их. Высказывания[2] синтактики лишены эмпирического содержания. Они ничего не говорят нам о физическом мире. Они представляют собой утверждения, подобные законам алгебры, которые устанавливают правила комбинирования и упорядочения алгебраических знаков. Короче говоря, абстрактная математика представляет собой ветвь синтактики.

Конечно, для того чтобы *судить* о какой-либо синтактической системе, мы должны выйти за ее пределы и использовать другой язык — *метаязык*. Например, если синтактические законы алгебры описываются в учебнике на английском языке, то последний выступает в роли метаязыка, а «объектами», к которым относятся слова учебника, оказываются знаки алгебры. Другими словами, термины метаязыка соотнесены

[1] См. работы: Моррис, 1938, а также Карнап, 1942.

[2] Высказывание (proposition) — в данном случае логико-математический термин. См., например, А. Тарский, Введение в логику и методологию дедуктивных наук, ИЛ, 1948; С. К. Клини, Введение в метаматематику, ИЛ, 1957. — *Прим. ред.*

посредством семантических правил с такими «объектами», которые сами являются терминами другого языка. Кроме того, эти «объекты» могут быть даже терминами того же самого языка, как, например, в тех случаях, когда учебники грамматики описывают на английском языке (метаязыке) синтаксис английского же языка (язык самого объекта).

Семантика имеет дело с правилами, касающимися отношений знаков к объектам. Какой объект мы называем «стулом», а какой — «столом»? Для обозначения чего в алгебраической формуле применяется знак x и что репрезентируют другие знаки? Очевидно, что, если формула что-то выражает, ее термины должны быть связаны посредством семантических правил с объектами или событиями; ее термины должны иметь значение. Семантические правила в своей основе произвольны в том смысле, что мы создаем их для нашего удобства, но при этом не всегда легко достигается удовлетворительное определение слов или символов. Общепринято, что семантические правила заключены в самой природе *операциональных* определений (ср. Стивенс, 1939а), но проблема нахождения таких определений, которые удовлетворяли бы операциональной проверке значения, является, как это показал Бриджмен в 1928 году, серьезным и трудным делом. Нетрудно построить высказывание: «Пусть x репрезентирует отношение ответственности к либерализму», — однако понять, о чем идет речь в этом высказывании, довольно трудно.

В тесной связи с проблемой операционального определения отдельных терминов находится вопрос об «истинности» эмпирических высказываний. *Термины приложимы* к объектам или событиям в тех случаях, когда семантические правила, регулирующие их употребление, удовлетворяют операциональным критериям. Предложения или формулы, созданные путем комбинирования этих *семантически* значимых терминов в высказывания, *эмпирически* значимы (то есть имеют истинное значение), если их истинность может быть подтверждена посредством конкретных операций. Операциональное определение терминов не гарантирует, что образованные из них формулы будут иметь силу в операциональном смысле. Так, H и W могут совершенно точно обозначать соответственно рост человека в дюймах и его вес в фунтах, но математическая формула $H=\sqrt{W}$ *может быть эмпирически ложной.*

Необходимо помнить, что подтверждение эмпирического утверждения никогда не может быть абсолютным и окончательным. Повторная проверка может несколько увеличить *вероятность* утверждения, но она никогда не делает его совершенно несомненным. Индукция, как указывал Юм, не является надежным методом доказательства какого-либо эмпирического утверждения. Высказывания, относящиеся к природе, всегда обладают лишь некоторой степенью вероятности, но отнюдь не являются несомненными (ср. Рейхенбах, 1938). Однако с синтактическими (математическими) утверждениями дело обстоит иначе. Здесь мы находим теоремы или уравнения, которые либо абсолютно истинны, либо абсолютно ложны. Они истинны, если согласуются с правилами, которые для них установлены; они ложны, если противоречат этим правилам. Но эти абсолютно истинные утверждения ничего, к сожалению, не говорят об объектах или событиях и не раскрывают ни одной тайны природы.

Именно при помощи семантических правил мы связываем математическую модель с эмпирическим миром. Как уже было отмечено выше, эта модель часто может не соответствовать объекту, подобно тому как может не подходить одежда с чужого плеча. Остановимся теперь несколько подробнее на некоторых доводах, свидетельствующих об этом несоответствии.

1. Эмпирические ошибки измерения допускаются всегда. Вычислить площадь круга мы можем с гораздо большей точностью, чем измерить при помощи физических операций. (В действительности иррациональность числа π препятствует точному вычислению площади круга, но мы можем сколько угодно продолжать увеличивать число десятичных знаков.)

2. Мы часто встречаемся с не поддающимися интерпретации математическими терминами, для которых невозможно установить семантические правила. Длина гипотенузы прямоугольного треугольника определяется из уравнения $h^2 = a^2 + b^2$, причем одно решение есть $+\sqrt{a^2+b^2}$, а другое решение есть $-\sqrt{a^2 + b^2}$. Мы отбрасываем отрицательное решение, поскольку «отрицательная длина» — выражение, лишенное смысла.

3. Правила классической математики подразумевают бесконечную делимость, но у нас есть основания полагать, что материя не обладает свойством бесконечной делимости.

4. Лишь немногие аспекты любого природного явления могут быть репрезентированы математическими формулами. Большая часть его аспектов оказывается упущенной — иногда преднамеренно, иногда по оплошности, — а те стороны, которые мы пытаемся описать, могут быть неудачно выбраны или неудовлетворительно определены. Поэтому возникающие ошибки — это, по существу, вопрос семантики.

Прагматика имеет дело с отношением между *знаками и исследователем*. Сюда относятся вопросы о том, каким образом исследователь (как организм, характеризующийся определенным поведением) употребляет различные знаки, о том, как он реагирует на них, и о том, как выбор знаков влияет на поведение. Здесь мы больше не будем останавливаться на этой очень интересной проблеме, отметим только, что тот своеобразный парализующий страх, который высокоодаренные люди, владеющие математикой, внушают тем, кто ею не владеет, — это вопрос из области прикладной прагматики. Подобное восхищение поразительной силой математика испытал Дидро, когда Эйлер (это было при дворе русской императрицы) поставил его перед осуществленным в математической форме установлением non sequitur в доказательстве бытия бога (Белл, 1937).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Формальные правила математики представляют собой произвольные конвенции[1]. Исторически этот факт был открыт довольно поздно. На ранних стадиях развития математики считали правильным доказывать математические утверждения эмпирически, например демонстрируя при помощи перекладывания камешков, что 2+2=4. Кажущаяся убедительность подобных действий с камешками в качестве проверки многих математических высказываний до сих пор мешает нам твердо осознать ту важную истину, что «процесс индукции, лежащий в основе всех экспериментальных наук, *навсегда изгнан* из строгой математики» (Данциг, 1939, стр. 67)[2].

[1] Conventions, то есть высказывания, истинность которых, согласно конвенционализму (идеалистической концепции, выдвинутой Анри Пуанкаре), определяется не фактами, а условными соглашениями исследователей. — *Прим. ред.*

[2] Точка зрения, согласно которой в математике нет места для индукции, является ошибочной. См. по этому вопросу книгу: Д. Пойа, Математика и правдоподобные рассуждения, ИЛ, 1957. — *Прим. ред.*

Использование пальцев может быть удобным способом, помогающим при счете, когда это необходимо, но оно не доказывает относительно природы арифметики ничего, кроме того обстоятельства, что правила для чисел, изобретенные нашими отдаленными предками, изоморфны определенным действиям на пальцах. Мы не удивляемся этому соответствию между пальцами и арифметикой, так как знаем, что в очень отдаленные времена какой-то человек изобрел систему натуральных чисел именно для того, чтобы иметь формальную модель, которая репрезентировала бы его действия на пальцах с камешками, с врагами или со скотом. Мы оставляем в стороне вопрос о том, что забытый гений того доисторического дня, возможно, не постиг *формально-эмпирической* дихотомии, которой мы придаем теперь решающее значение. Как бы то ни было, он создал формальную модель, репрезентирующую известный аспект его эмпирического мира, подобно тому как архитектор создает проект здания.

Детали процесса создания этой примитивной модели навсегда утеряны для истории, но нетрудно представить себе, как это могло произойти. Многие вещи существуют в очевидном количестве, как, например, пальцы (во многих древних языках числовые формы образованы от названий пальцев; ср. Харкин, 1941) или камешки (от их латинского названия происходит наше слово «калькулировать»). Имея дело с совокупностями таких предметов, первобытный человек применял *принцип соответствия* — основной математический прием, посредством которого мы устанавливаем взаимно-однозначное соответствие между объектами. Быть может, он прибавлял по одному камешку к груде для обозначения каждой рыбы, имевшейся в его запасах; и если кто-нибудь крал у него рыбу, то он мог обнаружить пропажу путем образования пар из оставшихся рыб и имеющихся камешков.

Этот процесс образования пар, продолженный до тех пор, пока не окажутся исчерпанными какая-нибудь одна из групп или одновременно обе, приводит непосредственно к понятию *количественного числа*. Если и рыбы и камешки можно разложить попарно таким образом, что вне пар не остается ни тех, ни других, то обе группы характеризуются одним и тем же количественным числом. Вот почему Фреге в 1879 году и независимо от него Рассел в 1901 году определили число как класс всех классов, находящихся во взаимно-однозначном соответствии с данным классом (ср. Белл, 1937, стр. 567). Так, например, число 3 количественно есть класс всех троек, 2 есть класс всех пар и т. д.

Всепроникающий принцип количественного числа характерен для многих систем счисления, как, например, для римской или египетской (см. Харкин, 1941). Древние египтяне изображали число девять следующим образом: $111_{111}111$. Однако количественные числа, покоящиеся только на принципе соответствия, не содержат в себе самого *процесса счета*. Наш доисторический предок, знавший только количественные числа, должен был пользоваться самыми разнообразными моделями, делая это несистематизированно и ad hoc. Для того чтобы создать процесс счета, он должен был изобрести систему, то есть расположить свой набор моделей в виде некоторой упорядоченной последовательности. Возможно, он совершал это изобретение в течение целых тысячелетий, размещая груды камешков в таком порядке, чтобы в каждой следующей груде имелся один лишний камешек по сравнению с соседней предыдущей грудой. В виде этих груд, расположенных в последовательном порядке, он получил вполне правильную модель, так как достиг правильного порядка, или последовательности. Затем он дал название этим упорядоченно расположенным грудам (тем самым создал правила семантики) и запомнил порядок названий. Только тогда первобытный человек оказался подготовленным к тому, чтобы действительно *считать* своих рыб. Он просто сопоставлял их попарно с последовательными названиями до тех пор, пока не перебирал всех рыб. Название, данное им последней рыбе, было *порядковым числом*, характеризующим его улов.

Этот вымышленный рассказ о том, как наш далекий предок совершил переход от количественных чисел к порядковым, имел целью пояснить различие между этими двумя видами чисел. Сама же данная история, несомненно, далека от истины. Заманчиво предположить, что количественные числа, основанные на попарном сопоставлении, предшествуют порядковым числам, предполагающим как попарное сопоставление, так и установление последовательного порядка. Однако «даже в результате проведения самых тщательных исследований в области первобытной культуры и филологии не удалось установить подобного предшествования. Где существует хотя бы какая-то техника счета, там одновременно обнаруживаются оба аспекта числа» (Данциг, 1939, стр. 9).

Читатель должен внимательно отнестись к тому, что говорится здесь, а также к тому, что будет сказано в дальнейшем о глубоко противоречивой природе основных понятий, являющихся пограничными для математического исследования. Сталкиваясь с этими понятиями, математики, подобно простым смертным, обращаются друг с другом довольно невежливо и стараются перекричать друг друга. Одна из наиболее шумных битв недавнего прошлого разгорелась между формалистами во главе с Гильбертом и интуиционистами, возглавляемыми Вейлем и Брауэром. Это столкновение было подробно описано Беллом (Белл, 1945, стр. 565—570). Мы упоминаем здесь о нем главным образом потому, что интуиционист Вейль не согласен с тем, что понятие количественного числа (класса) является первичным. Он считает «...неоспоримым, что *первичными являются порядковые числа*» (Вейль, 1949, стр. 35 [русск. перев., 1934, стр. 62]). Современный взгляд на этот предмет в большей степени согласуется с тем, что отстаивали формалисты. Возвратимся к его изложению.

Имена чисел мы называем в настоящее время числовыми формами. Тот факт, что существует «естественный» порядок, или упорядоченная последовательность числовых форм, делает возможной арифметику, то есть систему правил их комбинирования. Конечно, правила выбираются таким образом, чтобы их система могла, так же как и на заре человеческой мысли, продолжать служить моделью для элементов, подобных упорядоченным грудам камней. Так, если какие-либо две груды складываются, то в результате получается совокупность, обладающая такой же количественной характеристикой, какую имеет некоторая третья груда, принадлежащая к данной упорядоченной последовательности. Модель отражает эти факты в форме так называемых правил сложения. Вычитание в области числовых форм (например, $7 - 4 = 3$) отражает, ничего не изменяя в первоначально установленных семантических правилах, операцию отделения одной груды камней от другой. Умножение представляет собой последовательно производимое сложение, а деление есть последовательно производимое вычитание. Так мы приходим к арифметике целых чисел. А попутно мы установили шкалу измерения, а именно шкалу для измерения «численности» — количественного свойства физической совокупности объектов (Стивенс, 1939b).

Счисление

Изобретение упорядоченных числовых форм было важным достижением. Но далее возникает вопрос о том, как их записывать. Установление различных числовых форм для каждого из бесконечного множества чисел, репрезентирующих бесконечные груды камней, теоретически возможно, но психологически было бы губительно. Мы никогда не смогли бы запомнить все эти числовые формы. Мы должны иметь такие наборы различных символов и такие правила упорядочения их в последовательность, которые мы можем усвоить. Если нам дана какая-либо числовая форма, то мы должны знать, как образовать следующую за ней. Почти все системы счисления основываются на повторяющейся процедуре, которая дает возможность выразить большие числа посредством комбинации символов, обозначающих меньшие числа (ср. Ор, 1948).

Многие системы, как, например, римская, использующая символы I, II и III для 1, 2 и 3, основываются на отчетливо выраженном количественном принципе. Соответствующая этому принципу процедура психологически проста, и ее единственная цель состоит в том, чтобы обеспечить обозначение величины. Но как только мы предпринимаем попытку создать арифметику, употребляя символы этой системы, то сразу же обнаруживаем, что для римских числовых форм невозможно изобрести таблицу умножения, которую человек мог бы выучить так же, как ученики начальной школы выучивают таблицу умножения, построенную на арабских числовых формах. Для того чтобы убедиться в этом, попробуйте умножить MCDLVIII на XIX. Трудность, как мы это теперь знаем, коренится в том, что римская система счисления не имеет нуля — символа для незаполненного «места», — а поэтому в ней не может быть использован *позиционный принцип.*

Древним грекам и римлянам, при всем их интеллектуальном блеске, никогда не приходила в голову простая, но в то же время чрезвычайно плодотворная мысль: обозначить «ничто» при помощи символа. В том случае, когда мы пишем 505, римляне писали DV. Наша система счисления наглядно показывает нам, что в данном числе пять сотен, ни одного десятка и пять единиц. Секрет силы и простоты нашей системы счисления состоит в возможности при ее помощи выразить, например, тот факт, что «десятков нет». «Если подходить с этой точки зрения, то открытие *позиционного принципа,* совершенное неизвестным индийцем в одно из первых столетий нашей эры, выступает как событие мирового значения» (Данциг, 1939, стр. 29). Индийцы дали нулю название «шунья» (что означает «пустой» или «белый»), вероятно потому, что им пользовались для обозначения отсутствия знака в одном из столбцов на счетной доске.

Наибольшее распространение получила система счисления, имеющая своим основанием число *десять.* Выбор такого основания явился анатомически обусловленной случайностью и свидетельствует об антропоморфической природе нашего счета. Если бы лошадь (имеющая, как известно, трехпалые конечности) научилась считать, то она, вероятно избрала бы в качестве основания для своей арифметики число *шесть* или *двенадцать.* В десятичной системе, вопреки широко распространенному мнению, нет ничего «священного».

Возможны любые основания. И действительно, для специальных целей используются различные основания. В современных двоичных вычислительных машинах основанием служит число *два,* так как для их работы достаточно лишь двух цифр; последние могут быть моделированы при помощи включения реле для одной цифры и выключения его для другой. В двоичной системе наше число 22 изображается как 10110. Для Лейбница двоичная система счисления обладала таинственным изяществом, так как она дает возможность выразить любое число при помощи лишь единицы и нуля!

В действительности выбор числа десять в качестве основания системы счисления не является удачным. Удобнее было бы не иметь больших пальцев и ввиду этого использовать в качестве основания системы счисления число *восемь*. Доводов в пользу восьмеричной системы было приведено немало (ср. Тингли, 1940). При этом ссылаются на преимущества психологического характера: восьмеричная система, утверждают ее сторонники, облегчила бы счет в уме, так как позволила бы ускорить процесс последовательного деления пополам, являющийся психологически простейшей из совершаемых над числами операций. Результаты процесса последовательного удвоения выражаются в десятичной и восьмеричной системах следующим образом:

При основании десять:	1	2	4	8	16	32	64	128	256	...
При основании восемь:	1	2	4	10	20	40	100	200	400	...

Тингли указывает, что встречающиеся в различных странах мира монетные системы, единицы веса и другие единицы измерения имеют тенденцию подчиняться принципу последовательного удвоения, однако десятичная система счисления делает последовательное применение этого принципа неосуществимым. Например, денежные единицы, имеющие хождение в США, находятся в следующих соотношениях:

Денежные единицы (в центах)	1	5	10	25	50	100	200	500	1000	2000
Отношение последующей денежной единицы к предыдущей	—	5	2	2,5	2	2	2	2,5	2	2

Если бы мы использовали в качестве основания число восемь, то все эти отношения могли бы равняться точно двум, а процесс счета был бы значительно легче как для высокоодаренных, так и для умственно отсталых людей. Все множители числа восемь суть двойки, а в наш век двоичных вычислительных машин избрание такого замечательного числа в качестве основания нашей системы счисления обеспечивало бы весьма полезную экономию.

Однако выбор основания нашей системы счисления обусловлен анатомически, и вряд ли стоит заменять его другим ради лишь некоторых психологических преимуществ.

Расширение числовой области

Положительные целые числа, еще в древние времена упорядоченные в систему порядковых чисел, составляют лишь незначительную часть того, что мы теперь называем числовой областью. История математики свидетельствует о последовательном расширении этой области, которое достигалось только в результате трудных исследований и мучительных поисков.

Первым расширением числовой области, по-видимому, было введение дробей, что привело к понятию *положительных рациональных чисел*, как мы их теперь называем. С присоединением к математической модели этих новых элементов она стала адекватной для репрезентации не только тех предметов, которые можно пересчитать, но также и тех, которые изменяются по своей величине, как, например, длины. Аликвотные дроби[1] мы находим еще в папирусе Ахмеса в Древнем Египте (1700 год до н. э.), а Евклид исследовал *рациональные* отношения типа $\frac{m}{n}$, но сам не считал эти отношения числами (ср. Юнг, 1911, стр. 101).

Если математики нового времени, введя новые элементы в область чисел, оказались менее консервативными, чем Евклид, то интересен вопрос, почему это произошло. Дело, конечно, отнюдь не в темпераменте Евклида. Следует рассмотреть проблему рационального объяснения этих новых чисел. Чем они должны быть? Каким критериям должны они удовлетворять? Древние не могли дать ответа на этот вопрос, потому что они никогда не углублялись в проблему отличия формальной модели от эмпирического мира вещей и объектов и, кроме того, доверяли эмпирической индукции. Открытие возможности синтактики (науки о знаках и правилах), к которой приводит рассмотрение семантических определений, относится к новому времени. В *скрытой* форме понятие синтактики содержится уже в работах представителей ранних этапов развития математики; но только тогда, когда была специально выяснена природа знаков и правил, мы получили возможность сформулировать критерии введения в числовую область новых чисел.

Грубо говоря, идея математиков нового времени состоит в следующем: любое новое число может быть включено в числовую область, если оно подчиняется ее прежним правилам. Это требование аналогично условиям приема нового штата в состав государства, состоящим в том, что этот штат должен дать согласие повиноваться федеральным законам. Действующие в области чисел законы касаются сложения, умножения, вычитания и деления, и новые числа должны «вести себя» согласно этим правилам, когда над ними совершаются указанные действия. Поскольку рациональные дроби соблюдают надлежащий декорум, когда они складываются, умножаются и т. п., то мы решаем допустить их в числовую область.

В действительности же, конечно, новые виды чисел отнюдь не берутся из ничего, чтобы затем подвергнуться проверке с точки зрения их подчинения правилам, сформулированным еще в то время, когда создавалась арифметика натуральных чисел. Истина состоит скорее в обратном. Именно попытки применения самих правил арифметики вызывают появление этих новых чисел. Так, вычитая 4 из 7, мы получаем 3; но допустим, что мы вычитаем 7 из 4. В пределах системы натуральных чисел такое вычитание невозможно, и примерно до времени Декарта (1596—1650) подобного рода операции исключались из математики как «абсурдные» или «фиктивные». Но если мы вводим *отрицательные* числа, то вычитание становится возможным во всех случаях, и после долгих лет борьбы и столкновений мнений эти диковинные и даже «абсурдные» пришельцы стали в мире чисел вполне натурализованными гражданами. Аналогичным образом и рациональные дроби

[1] Аликвотные (или основные) дроби суть дроби вида $1/n$, где $n = 1, 2, 3$ ... и т. д. См. О. Нейгебауэр. Лекции по истории античных математических наук, т. I, Объедин. научно-технич. изд-во, М.—Л., 1937, стр. 102—103. — *Прим. ред.*

получили права гражданства в математике именно потому, что они сделали всегда возможной операцию деления.

Мы наблюдаем здесь стихийную тенденцию части математиков «...распространять правила, выведенные для частных случаев, на другие, более общие случаи» (Клейн, 1945, стр. 26 [русск. перев., 1933, стр. 38]). Отмеченное стремление к обобщениям стало очень ценным качеством современных математиков, и в 1867 году Ханкель подчеркнул его важную роль, заявив, что в арифметике оно является ведущим принципом. Он назвал его *принципом перманентности формальных законов*, желая подчеркнуть, что, как мы уже отмечали выше, главное в математике — это ее правила. В противоположность идеальному государству, в котором законы создаются для людей, в математике ее элементы создаются для законов.

Вместе с подведением отрицательных чисел под этот «принцип перманентности» математика настолько изменила характер своих исследований, что стала очевидной разумность отстаиваемой нами точки зрения, согласно которой математика представляет собой синтактическую игру по условным правилам. Встречаясь с числами, полученными в результате вычитания большего числа из меньшего (например, $4 - 7 = -3$), мы убеждаемся, что становится все труднее подходить к арифметике как к системе конкретных числовых величин и все более удобно рассматривать ее как формально-символическое построение. С расширением числовой области до таких пределов, что исчезает понятие о *наименьшем числе,* с большей очевидностью обнаруживается невозможность эмпирического доказательства положений арифметики, которое пытались дать математики древнего мира.

С введением отрицательных чисел начинают происходить любопытные вещи. Феликс Клейн, один из величайших математиков современности, цитирует Макса Симона, чтобы присоединиться к его мысли о том, что «...именно вследствие введения отрицательных чисел, благодаря которому вычитание становится действием, не имеющим исключения, оно перестает существовать как самостоятельная операция» (Клейн, 1945, стр. 24 [русск. перев., 1933, стр. 34]). Вычитание превратилось просто в сложение отрицательных чисел.

Конечно, поскольку новые формальные элементы уже введены в систему, постольку часто оказывается возможным соотнести их посредством семантических правил с объектами, или событиями, или даже с элементами других систем. Так, в бухгалтерии знак минус может означать, что вы задолжали банку некоторую сумму денег. А в геометрии знак минус можно интерпретировать как *поворот* на 180 градусов, так что при подобной интерпретации отрицательные числа относятся к отрезкам, имеющим направление, противоположное направлению тех отрезков, которые обозначаются положительными числами (ср. Юнг, 1911, стр. 114). Еще раз применив (возможно, несознательно) принцип перманентности, западноевропейские математики ввели в XVI веке иррациональные числа (ср. Клейн, 1945). Иррациональные числа необходимы для решения уравнений, подобных $x^2 - 2 = 0$.

Результат извлечения корня квадратного из 2 не есть рациональное число, каким является, например, дробь $^7/_5$, поскольку $\sqrt{2}$ нельзя представить в виде отношения двух целых чисел. Тем не менее иррациональные числа вошли в арифметику и применяются в ней с такой же пользой, как и «послушные закону» представители этой области.

Фактически еще древние греки знали о существовании несоизмеримых целых чисел. Им было известно, что гипотенузы большей части прямоугольных треугольников иррациональны, поскольку несоизмеримы с их катетами. Это свое открытие Пифагор отметил жертвоприношением сотни быков. Более того, у греков было специальное слово для обозначения таких величин, а именно — «не могущее быть выраженным». Этот термин лучше своего латинского эквивалента (иррациональный) отражает природу этих чисел, которые отнюдь не противоречат разуму (ratio), но просто не могут быть выражены посредством целых чисел. Однако среди пифагорейцев открытие иррациональных чисел вызвало чувство замешательства. До нас дошли сведения о том, что члены союза поклялись хранить тайну об этом «несовершенстве» числовой системы, чтобы не поколебать веру в то, что числа управляют космосом. По этому поводу Данциг цитирует Прокла: «Говорят, что те, кто первыми разгласили тайну иррациональных чисел, сообщив ее непосвященным, все до одного погибли при кораблекрушении».

Как мы уже видели, алгебраические иррациональные числа проложили себе путь в числовую область (подобно тому, как это произошло ранее с отрицательными числами) именно потому, что они были необходимы для решения определенных математических проблем. Интересный вопрос, никем не поставленный до 1844 года [1], заключается в том, что существуют такие иррациональные числа, которые не являются алгебраическими, — числа, не удовлетворяющие никакому алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами. В 1873 году Ш. Эрмит удивил и восхитил весь математический мир, доказав, что основание натуральных логарифмов число e, равное 2,718281828..., не может быть корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, а в 1882 году Ф. Линдеман показал то же для числа π. И e и π принадлежат к категории *трансцендентных* чисел, называемых так потому, что они, как указывал Л. Эйлер, «...превосходят мощность алгебраических методов» (Курант Р. и Роббинс Г., 1941, стр. 104 [русск. перев., 1947, стр. 157]). Трансцендентные числа представляют собой одно из самых плодотворных математических изобретений, так как включают в себя подавляющую часть чисел, получаемых при использовании логарифмических и тригонометрических функций, которые с полным правом могут быть названы рабочими лошадьми прикладной математики.

После введения трансцендентных чисел числовая область стала значительно более широкой и полной, чем это мог даже представить себе человек древнего мира. Все рассмотренные нами числа принадлежат к области так называемых *действительных* чисел, используя которые мы можем производить многочисленные и разнообразные вычисления. И все же еще остается ряд даже весьма простых операций, которые мы не в состоянии выполнить, не выходя за пределы области действительных чисел. Так, например, мы не можем при этом условии решить уравнение $x^2 + 1 = 0$, ибо выражение $\sqrt{-1}$ кажется бессмыслицей. Попыткам писать $x = \sqrt{-1}$ очень долгое время препятствовало сознание невозможности извлечения квадратного корня из отрицательного числа. Индийцы и арабы не поддались искушению писать такие числа, хотя в других областях математики они проявили достаточную смелость мысли. Итальянец Дж. Кардано, по-видимому, был первым (это было в 1545 году), кто отважился, хотя и с оговорками, обозначить

[1] 1844 год — год установления французским математиком Ж. Луивиллем существования трансцендентных чисел. В частной форме, для некоторых чисел вида α^{β}, эта проблема была поставлена Л. Эйлером на столетие раньше — еще в 1744 году. — *Прим. ред.*

эту «фикцию» посредством символа[1]. Получив однажды символическую форму выражения, эти мнимые числа, как их с тех пор называют, заняли среди чисел видное место. Обозначенные символом i и соединенные с действительными числами, они образуют числа типа $x+yi$, или комплексные числа, которые играют столь значительную роль в современной алгебре. Только с помощью этих чисел молодой Гаусс смог в своей докторской диссертации (1799) доказать предложение, называемое математиками основной теоремой алгебры, а именно что всякое алгебраическое уравнение с одним неизвестным необходимо имеет корень. Знаменитый многочисленностью своих трудов Л. Эйлер уже в 1748 году открыл замечательное соотношение, в котором фигурируют и целое, и трансцендентные, и мнимое числа:

$$e^{\pi i} = -1.$$

Создание комплексных чисел с поистине сценической наглядностью продемонстрировало, насколько правомерно проведение различия между формальной моделью и эмпирическим миром (Стивенс, 1939а). Эти числа первоначально развились исключительно из чисто математических потребностей, и в то время, когда формулировались правила, касающиеся их сложения и умножения, никто даже не предполагал, что они будут применены для решения конкретных эмпирических задач. Первое время комплексные числа были просто абстрактными символами, бесполезными для прикладной математики. Правда, математики испытывали известное беспокойство от того, что большинство людей еще не смирилось с мыслью, что непонятные для них символы ничем не могут угрожать им и что формальная система не нуждается для своего оправдания в том, чтобы ее практически применяли в качестве модели предметов, которые мы способны непосредственно воспринимать. Тем не менее такая формальная система, как алгебра комплексных чисел, возникла и была разработана в весьма «разреженной» атмосфере абстракций, «...*помимо и даже против воли*» отдельных математиков (Клейн, 1945, стр. 56 [русск. перев., 1933, стр. 85]).

История математики показывает, что сомнения в законности комплексных чисел исчезли в начале XIX века, когда было дано простое геометрическое истолкование действий над комплексными числами. В действительности же возможность геометрического истолкования не доказывает ни законности, ни «реальности», ни «святости» комплексных чисел, но это устраивает людей с конкретным образом мышления и интуиционистов, а также ведет непосредственно к практическому применению алгебры комплексных чисел в физических науках.

Геометрическая схема заключается просто в том, что число типа $x+yi$ представляется в виде точки на плоскости с абсциссой x и ординатой y. Отношения между точками на «числовой плоскости» отражаются алгеброй комплексных чисел, подобно тому как отношения между точками на линии отражаются в алгебре действительных чисел. Кроме того, символ i может быть истолкован как *вращение*. Знак минус, как было отмечено выше, соответствует в геометрии повороту на 180 градусов, и аналогичным образом знак i соответствует повороту на 90 градусов. Таким образом, действительная часть x комплексного числа выражает продвижение на x единиц вдоль оси абсцисс, а прибавляемая

[1] Дж. Кардано, исследуя кубическое уравнение, получил для *действительных* его корней (в так называемом неприводимом случае) комплексные выражения, что и заставило его «признать» мнимые числа. — *Прим. ред.*

к ней мнимая часть yi — поворот на 90 градусов и затем продвижение в этом направлении (то есть в направлении оси ординат) еще на y единиц.

Этот изоморфизм между геометрией и комплексными числами предъявляет к инженеру требование быть хорошо подготовленным в алгебре комплексных чисел. Например, имея дело с задачами, касающимися переменного тока, инженер может обозначить через x — сопротивление, через yi — индуктивное сопротивление и через $-yi$ — емкостное сопротивление. Таковы его семантические правила. После этого он может пустить в ход «машину» алгебраических выкладок и конструировать формулы, выражающие поддающиеся измерению характеристики электрической цепи. Другими словами, он может использовать эту формальную систему в качестве модели для сложной теории переменных токов. То, что вначале казалось «пустой игрой с символами», оказывается связанным посредством семантических правил с омами, генри и фарадами. И эта модель действует настолько хорошо, что некоторые инженеры-практики, не знакомые с историей науки, думают, что алгебра комплексных чисел была изобретена специально для того, чтобы с ее помощью можно было анализировать законы электрических цепей.

Изобретатели комплексных чисел не только не заботились об инженерах-электриках с их практическими проблемами, но и были убеждены в невозможности практического применения этих чисел. Они были похожи на портного из сказки, который, подчиняясь навязчивой фантазии, скроил одеяния для таких существ, которых он никогда не видел и лишь с трудом мог себе представить. Но вот однажды к нему является клиент, которому точно подходят фантастические одежды, и это приводит всех в изумление и восхищение. Но, как мы уже отмечали в начале данной главы, большая часть «одежд», выкроенных современными математиками, не «подходит» ни к одной из известных ныне сторон физического мира [1]. И эти оперирующие символами «портные», по всей вероятности, будут продолжать создавать новые отрасли математики значительно быстрее, чем можно найти для них применение. Математика не превратилась еще в законченную, навсегда застывшую систему [2].

На этом мы заканчиваем наш краткий обзор [истории] чисел и того, каким образом мы их получали. Конечно, можно было бы продолжить рассмотрение и показать, как в числовую область были включены еще и другие виды чисел: числа, соответствующие точкам трехмерного пространства, кватернионы, матрицы, алгебраические идеалы и т. п. Оказывается, что, освободившись однажды от страха перед «пустыми» символами, математики изобрели массу новых видов чисел, одни из которых имеют практическое применение, а другие — не имеют. Нет необходимости рассматривать здесь эти новые виды чисел, однако следует обратить внимание на одно особое обстоятельство: расширение числовой области за пределы комплексных чисел требует ослабления правил, которым подчиняются эти последние. «Власть» принципа «перманентности формальных законов» должна быть ограничена, когда нам приходится складывать и умножать такие «вещи», как матрицы, предста-

[1] Это утверждение автора находится в резком противоречии с фактами. Именно благодаря приложимости математических теорий к физическим и другим объектам стали возможны новейшие достижения науки. — *Прим. ред.*

[2] В книге Белла (см. Белл, 1945, стр. 21) описаны другие четыре ярких примера обобщения математических принципов, к которому побуждала лишь любознательность и которое было сделано без какой-либо перспективы возможного практического применения.

вляющие собой состоящие из нескольких рядов элементов «числовые таблицы», которые могут быть использованы в факторном анализе[1]. Выдающимся новшеством явилось открытие ирландским математиком Гамильтоном необходимости отказаться от коммутативности умножения, для того чтобы иметь возможность расширить алгебру комплексных чисел до чисел [соответствующих точкам пространства] «n измерений». Как известно, коммутативный закон выражает положение, столь очевидное для интуиции, а именно что $a \times b = b \times a$. И поэтому, когда Гамильтон предложил систему кватернионов, в которой $a \times b$ не было равно $b \times a$, это был смелый шаг, произведший сильное впечатление.

Резюмируя вышеизложенное, мы приходим к заключению, что правила и постулаты формальной системы конвенциональны. Согласно этой концепции, «принцип перманентности» оказывается не столь уже постоянным. История науки еще и еще раз доказывает, что изменение формальных законов скорее обогащает математику, чем вносит в нее путаницу. Быть может, именно поэтому Белл называет «принцип перманентности» «глупым и дискредитированным». Характеризуя коротко современное отношение к этому вопросу, он приводит следующее меткое сравнение: «Подобно тому как писатель-романист создает характеры, диалоги и ситуации, будучи одновременно и их творцом и их повелителем, так и математик изобретает по своему усмотрению те постулаты, на которых он основывает свои математические системы» (Белл, 1945, стр. 330). Между прочим, сам Белл известен также и как автор научно-фантастических повестей (под псевдонимом Джон Тэйн).

Резюме сказанного о числовой области

Не останавливаясь на гиперкомплексных числах (подобных кватернионам), мы можем теперь подвести итог рассмотрению числовой области. При этом будет полезным обратиться к высказываниям известных математиков, а также использовать таблицу. Приведем здесь отрывок из Гаусса (считающегося величайшим из когда-либо живших математиков), цитируемый Данцигом (Данциг, 1939, стр. 189—190), этим блестящим истолкователем теории чисел. Гаусс писал в 1831 году:

«Наша общая арифметика, далеко превосходя по своему объему геометрию древних, является полностью детищем современности. Начав с понятия абсолютных целых чисел, она постепенно расширяла их область. К целым числам были присоединены дробные, к рациональным — иррациональные, к положительным — отрицательные, к действительным — мнимые.

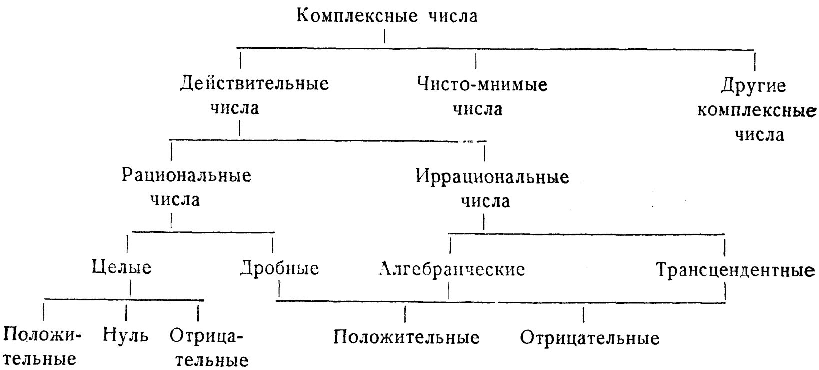
Однако каждый новый шаг на этом пути был робким и неуверенным. Ранние алгебраисты называли отрицательные корни уравнения ложными, и это понятно, поскольку задачи, с которыми они были связаны, ставились всегда в такой форме, что характер искомых величин исключал возможность противоположных значений этих последних. Но раз никто не сомневается в законности включения дробей в общую арифметику, хотя имеется очень много предметов, которые можно сосчитать и для которых дроби не имеют никакого смысла, — то мы не должны лишать и отрицательные числа тех прав, которые признаны за числами положительными, только на том основании, что имеется бесчисленное множество случаев, не допускающих противоположных значений величин. Существование отрицательных чисел в достаточной

[1] Автор упоминает только одну из весьма многочисленных областей, в которых применяются матрицы. — *Прим. ред.*

степени оправдано, так как в бесконечном множестве других случаев они получают совершенно адекватное истолкование, и это давно уже всеми признано. Однако что касается мнимых чисел, которые прежде, да иногда и теперь, неправильно называют «невозможными», то, хотя их и «допускают», они все еще полностью не «натурализованы», их считают скорее бессодержательной игрой символов, разумная основа которых категорически отрицается даже теми, кто не склонен недооценивать большого значения, которое имеет эта игра символов для раскрытия всего богатства отношений реальных величин».

Таблица 2

Система чисел



В таблице, иллюстрирующей состав числовой области, мы расположили виды чисел в порядке расчленения системы комплексных чисел на ее подразделения. Это возможно потому, что все действительные числа представляют собой частные случаи комплексных чисел, когда коэффициент при i равен нулю. Аналогичным образом в тех случаях, когда действительная часть комплексного числа есть нуль, мы получаем чисто-мнимое число [1].

Вывод, который мы можем сделать из изучения числовой области, заключается в том, что если даны некоторые фундаментальные постулаты или принципы, определяющие отношения внутри формальной системы, то ее элементы вытекают один из другого автоматически. Или, как говорит Данциг, «арифметика начинает не с чисел, прежде всего она устанавливает критерии» (Данциг, 1939, стр. 208). Столетие или два тому назад эти критерии (подобно взаимно-однозначному соответствию, лежащему в основе понятия количественного числа) существовали в математике лишь в неосознанной форме. Поиски фундаменталь-

[1] Необходимо, однако, отметить, что Рассел возражает против такого способа рассмотрения числовой области. «Одной из ошибок, которые затормозили открытие правильных определений в этой области, — говорит он, — является обычное представление, согласно которому каждый вид чисел включает в себя все предыдущие виды как свои частные случаи» (Рассел, 1920, стр. 63).

По Расселу, отрицательные числа суть отношения или частные случаи «чисел-отношений» и поэтому не принадлежат к тому же «миру», что и количественные числа, представляющие собой классы классов.

Тем не менее подобное «обычное представление», как его называет Рассел, является вполне приемлемым, хотя, быть может, и не вполне строгим способом рассмотрения этого вопроса. «В теории это ошибка, но так удобно делать на практике» (Рассел, 1920, стр. 76).

ных принципов математики характерны только для самого последнего времени. Математики очень поздно пришли к ясному осознанию тех правил, которым их предшественники бессознательно следовали в своих выкладках.

Рассмотрим подробнее некоторые из этих фундаментальных постулатов, которые определяют природу математики. При этом уместно вспомнить следующие слова Юнга: «...исходным пунктом любой математической науки должна быть некоторая совокупность не получивших определения терминов и недоказанных предложений (допущений) относительно этих терминов. Саму же науку образуют формально-логические выводы из упомянутых предложений» (Юнг, 1911, стр. 59). Элементарные «объекты» математического исследования — числа, точки, линии и т. д. — не являются субстанциональными «вещами в себе» и не поддаются точному определению. Единственное, что мы можем определить в них, — это их соотношения и те правила, которым подчиняются операции над ними.

Кутюра писал по этому вопросу: «Математик никогда не определяет величин как таковых, что попытался бы сделать философ; он определяет их равенство, их сумму и их произведение, и эти дефиниции определяют, или, точнее говоря, образуют, собой все математические свойства величин. Математик *устанавливает* символы в еще более абстрактном и более формальном смысле и в то же время *предписывает* те правила, согласно которым эти символы можно комбинировать друг с другом; этих правил достаточно для того, чтобы охарактеризовать используемые символы и чтобы придать им математическое значение. Короче говоря, математик создает математические объекты при помощи произвольных конвенций, подобно тому как в шахматах то, что представляют собой различные шахматные фигуры, определяется нашими условными соглашениями, регулирующими передвижения фигур и отношения между ними» (цит. по книге: Белл, 1937, стр. 565).

Не сами фигуры, а именно правила определяют игру в шахматы, и совершенно безразлично, играем ли мы фигурками из слоновой кости или перламутровыми пуговицами [1].

Быть может, проведенное здесь исследование оснований формальной математики и не имеет для психолога непосредственно очевидного практического интереса, но мы обязательно должны были его проделать, так как оно проливает свет на нашу основную проблему — проблему установления масштабов измерений.

Свойства отношений

Как мы уже видели, сущность математики заключается в установлении *отношений* между элементами. Признание этого факта привело к созданию сложной специальной теории — *теории отношений*, которая

[1] Как показывает предшествующее изложение, С. Стивенс истолковывает математику в духе *конвенционализма* — концепции, оказавшей значительное влияние на различные идеалистические философские школы позитивистского типа, в том числе и на *операционализм*, которого придерживается С. Стивенс. В соответствии с этой концепцией автор считает, что математика лишь изобретает основанные на произвольных «конвенциях» построения, своего рода «игру символов». В действительности же математические теории обладают *объективной* познавательной «ценностью». Системы математических положений оказываются способными служить моделями определенных свойств объективной реальности не потому, что мы ставим их в чисто *случайное* для них отношение к этим свойствам, а потому, что это совершенно закономерно вытекает из самой логики развития науки математики. — *Прим. ред.*

составляет важную область современной логики (Тарский, 1941 [русск. перев., 1948, гл. V]; Рейхенбах, 1947). По своему существу логика отнюдь не является чем-то посторонним для математики. Согласно современным взглядам, сама математика представляет собой одну из отраслей логики, и, следовательно, понятие числа и другие математические понятия получают определение в логике[1]. Отсюда следует, что «...вся чистая математика, поскольку она может быть выведена из теории натуральных чисел, есть только продолжение логики» (Рассел, 1920, стр. 25).

Нет необходимости рассматривать здесь исчисление отношений обстоятельно и подробно, но некоторые специфические свойства этих отношений заслуживают самого пристального внимания с нашей стороны. Для удобства можно подразделить эти свойства на четыре группы — по три в каждой. Тогда все интересующие нас отношения будут характеризоваться определенными комбинациями трех свойств, каждое из которых относится к одной из этих четырех групп (см. табл. 3).

Указанные четыре категории имеют дело соответственно с рефлексивностью, симметричностью, транзитивностью и связностью. Мы постарались проиллюстрировать эти понятия при помощи примеров, приведенных в табл. 3. Пожалуй, этих примеров достаточно, для того чтобы передать смысл первых трех категорий. Смысл четвертой категории можно уяснить из следующего определения Рассела: «Отношение является *связным*, если при любых двух данных терминах, принадлежащих к его полю, оно содержит в себе отношение между первым и вторым или между вторым и первым (не исключена возможность, что имеют место оба случая, однако это исключается при асимметричном отношении)» (Рассел, 1920, стр. 33). Другими словами, отношение есть отношение связности, если оно содержит в себе отношения между всеми парами элементов специфического поля. Связные отношения необходимы (но недостаточны) для упорядочения предметов в ряды.

В качестве интересного упражнения можно проделать следующее: подобрать ряд примеров и приписать им специфические свойства. Проделывая это, необходимо помнить, что важно точно определить «поле» отношения, то есть класс соотносимых предметов, будь то натуральные числа, действительные числа, все люди, некоторые люди, треугольники и т. д. (Каково поле для примеров, приведенных в табл. 3, — это в большинстве случаев может быть выведено, а в некоторых случаях это и так ясно.)

Иногда различают и другие свойства отношений. Так, например, отношение может быть *одно-однозначным* (квадрат какой-либо величины, чей-либо муж); *одно-многозначным* (чей-либо отец); *много-однозначным* (отношение сына к отцу; корень квадратный из какого-либо числа) и *много-многозначным* (чьи-либо дедушка или бабушка).

Одно-однозначное отношение, которое Рассел рассматривает как особый случай одно-многозначного отношения, имеет для математики особенно большое значение, так как оно содержится во всех отношениях типа «то-то от того-то», например король Сиама, ручка насоса, квадрат числа x, ln числа y и т. д. К отношениям этого рода Рассел применяет термин *функция*. В математическом смысле выражение «y есть то-то

[1] Концепция, согласно которой математика сводится к логике, характеризует не современные взгляды вообще, а, главным образом, взгляды Г. Фреге и Б. Расселом. — *Прим. ред.*

от x» определяет такую функцию, в которой x является *аргументом* функции, а y — *значением* функции от аргумента x. Таковы описательные функции, и в этом смысле высказывание «жена Сократа» в такой же мере является функцией, как и собственно математические формулировки.

Таблица 3

Некоторые свойства отношений

Категория	Свойство	Примеры
I	Рефлексивность	Равный ($x = x$ для всех значений x); подобный; включающий что-либо.
	Мезорефлексивность	Взаимный (x может быть или может не быть взаимным с x).
	Иррефлексивность	Больше, чем (для всех x несправедливо, что $x > x$); старше, чем; неравный.
II	Симметричность	Равный (если $x = y$, то $y = x$); неравный; находящийся в отношении родства с кем-либо; пропорциональный; супруг.
	Мезосимметричность	Не больше, чем (если $y \not> x$, то y может быть равен x или меньше, чем x); сердитый на; включающий; брат.
	Асимметричность	Больше, чем (если $x > y$, то $y \not> x$); отец; следующий за.
III	Транзитивность	Равный (если $x = y$ и $y = z$, то $x = z$); больше, чем; чей-либо предок.
	Мезотранзитивность	Неравный (если $x \neq y$ и $y \neq z$, то x может быть равен, а может быть и не равен z); сердитый на; влюбленный в.
	Нетранзитивность	Отец (если x является отцом y, а y является отцом z, то x не является отцом z); следующий за.
IV	Связность	Больше, чем (если из натурального ряда выбраны любых два различных числа, то одно из них больше, чем другое); телефонная связь с (в телефонной системе Белла каждый абонент может вызвать любого другого абонента).
	Мезосвязность	Предок (один из любых двух данных людей может быть, а может и не быть предком другого); следующий за.
	Несвязность	Несходный с (из любых двух данных отпечатков пальцев ни один не похож на другой).

Сосредоточив свое внимание на рассмотрении свойств отношений, перечисленных в табл. 3, мы можем выделить определенные комбинации свойств, имеющие особенно важное значение, потому что они характеризуют основополагающие математические отношения в поле чисел. Так, отношение *тождества,* выражаемое знаком $=$, рефлексивно, симметрично, транзитивно и несвязно, а отношение «наследник чего-либо» — иррефлексивно, асимметрично, нетранзитивно и мезосвязно.

Одна из наиболее интересных комбинаций этих свойств касается отношений, являющихся иррефлексивными, асимметричными, транзитивными и связными. Небольшое размышление приводит к пониманию того, что каждое отношение этого вида устанавливает *линейную упорядоченность*. В самом деле, чтобы получить критерий упорядочивающего отношения, необходимы только три свойства: *асимметричность, транзитивность* и *связность*, — ибо если отношение транзитивно и асимметрично, оно также и иррефлексивно (свойства отношений не всегда независимы). Отношения, обладающие теми тремя свойствами, которые определяют порядок, включают, в частности, такие отношения, как «больше, чем» и «меньше, чем».

Постулаты порядка

Поскольку для многих психологических исследований весьма важным является расположение элементов изучаемых явлений в ранговый порядок, рассмотрим вопрос о том, как мы можем охарактеризовать линейный порядок при помощи системы *формальных допущений*. Этими допущениями, или, как их часто называют, постулатами, мы обязаны Хантингтону (ср. Юнг, 1911, стр. 68). Устанавливая их, мы вместе с тем формулируем те условия («требования»), которым должна удовлетворять некоторая система, если она должна классифицироваться как упорядоченная. Слово «постулат» происходит от латинского глагола «postulare», означающего «требовать».

Прежде всего мы вводим символ $<$, не давая ему никакого определения. Он может обозначать любое из отношений, таких, как «меньше, чем», «раньше, чем», «младше, чем», «ниже, чем» и т. п. Мы используем также отношения симметрии, выражаемые символом $\neq$, который означает «отличный от».

Если нам дан некоторый класс элементов, то пусть a, b и c — элементы этого класса. Предположим, что отношение $<$ подчиняется следующим правилам:

O_1 Если $a \neq b$, то либо $a < b$, либо $b < a$.
O_2 Если $a < b$, то $a \neq b$.
O_3 Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Эти три требования налагаются на отношения между элементами упорядоченного ряда. Отношения, удовлетворяющие этим трем требованиям, определяют то, что мы подразумеваем под линейным порядком. Мы уже видели, что отношения, определяющие порядок, должны обладать тремя свойствами: связностью, асимметричностью и транзитивностью. И нетрудно видеть, что эти три свойства характеризуют отношения между элементами, подчиняющимися трем постулатам Хантингтона.

Критерии постулатов

Остановимся на вопросе о постулировании. Поскольку постулаты представляют собой лишь наши допущения об отношениях, то ясно, что в начале исследования постулирование не столь трудное дело. Б. Рассел, резко выступая против выдвигающих постулат о том, что иррациональное число есть предел последовательности [рациональных] дробных чисел, которые неограниченно приближаются к иррациональному, писал: «Метод «постулирования» того, что мы хотим, имеет много преимуществ; эти последние — того же рода, что и преимущества вора перед честным тружеником» (Рассел, 1920, стр. 71). Но будет постулирование воровством или нет, это зависит от обстоятельств. Рассел возражает не против постулирования вообще, а только в тех случаях, когда оно производится с целью уклониться от столкновения с проблемой, которую можно разрешить лишь честным и упорным трудом. Выдвигая исходные постулаты математической системы, мы не стремимся уйти от трудностей; мы стремимся только убрать не относящиеся к делу второстепенные подробности, с тем чтобы достигнуть более ясного понимания сущности системы. Вообще мы хотим установить, при каком минимальном числе понятий, оставленных без определения, можно все же вывести все положения и теоремы данной системы. Следовательно, имеются критерии, применяемые к постулатам с целью определить их пригодность. Важнейшими из этих критериев являются *непротиворечивость, независимость* и *достаточность*. Первый из них является необходимым; два других — в известном смысле не обязательны.

Непротиворечивость имеет место в тех случаях, когда можно показать, что система, в которой мы не обнаружили противоречий, соответствует данным постулатам. Постулаты порядка непротиворечивы, так как системы, подобные натуральному ряду или множеству точек прямой, удовлетворяют постулатам, при том, конечно, условии, что надлежащая интерпретация будет дана и символу $<$. Для чисел натурального ряда этот символ может иметь значение «меньше, чем», для точек линии — значение «предшествует».

Независимость означает, что ни один из постулатов не может быть выведен из других. Требование независимости не является логической необходимостью, так как простое удвоение или же частичное совпадение постулатов не лишают обоснованности систему, которая им подчиняется. Но независимость желательна с точки зрения экономичности и для придания системе определенного изящества.

Читатель может проверить независимость постулатов порядка, давая различные интерпретации символу $<$, для которого одни постулаты оказываются справедливыми, а другие — ложными. Можно начать, например, с допущения, что символ $<$ означает «предок».

Достаточность иногда называют *категоричностью*. Этому требованию мы можем подчинить или не подчинить совокупность постулатов — в зависимости от наших целей. Достаточность относится к способности постулатов определять только одну систему как противостоящую некоторым другим системам, не являющимся взаимно-изоморфными. Две системы изоморфны, если элементы одной системы могут быть приведены во взаимно-однозначное соответствие с элементами другой системы. Оказывается, что постулаты порядка не являются достаточными для определения только одной системы. Этим постулатам могут удовлетворять и некоторая конечная совокупность целых чисел, например от 1 до 10, и вся бесконечная совокупность всех целых чисел. Очевидно, что элементы этих двух совокупностей не могут быть приведены во взаимно-однозначное соответствие.

В отличие от постулатов порядка фундаментальные постулаты алгебры достаточны для определения только одной системы. В связи с этим нам кажется уместным обратить внимание на следующий общий принцип: отбрасывание одного из постулатов, на которых основана данная система, делает эту систему более общей. Другими словами, когда число постулатов ограничено, легче найти примеры, которые бы им удовлетворяли. Так, мы уже видели, что отказ от коммутативного закона сделал возможным присоединение к числовой области кватернионов. Другим ярким примером является создание многочисленных неевклидовых геометрий в пределах сферы, расширенной благодаря уменьшению числа постулатов (то есть такой системы постулатов, в которой нет постулата параллельности).

Постулаты алгебры

Большой интерес представляет то обстоятельство, что, хотя метод введения постулатов был применен в геометрии два тысячелетия тому назад, только в наше время фундаментальные допущения алгебры были извлечены из того множества разнообразнейших правил, которым подчиняются алгебраические операции. В этих фундаментальных постулатах представлена, таким образом, в чистом виде мудрость, накопленная алгеброй за ее более чем трехтысячелетнюю историю исканий и выдумок.

Необходимо также сразу же отметить, что, строго говоря, существует не одна алгебра, а много алгебр, по меньшей мере одна для каждого главного подразделения числовой области. В известном смысле все алгебры включены в алгебру комплексных чисел, которая во многих отношениях проще любой из более ограниченных алгебр. Мы не будем приводить здесь все 27 постулатов алгебры комплексных чисел; отметим только, что они, как показал Хантингтон, непротиворечивы, независимы и достаточны. Вместо рассмотрения этих постулатов мы займемся постулатами обычной алгебры, которые Харкин представляет в виде схемы. Достоинство последней состоит в ее мнемонических свойствах; все, что требуется помнить, — это лишь слово «scared» [1], которое каждому изучающему алгебру представится вполне уместным.

Таблица 4

Постулаты обычной алгебры

S	Синтез	$a+b=c$ $a\times b=c$	Синтез любых двух элементов множества дает в результате третий элемент, который принадлежит к тому же множеству
C	Коммутативность	$a+b=b+a$ $a\times b=b\times a$	Операции коммутативны
A	Ассоциативность	$a+(b+c)=$ $=(a+b)+c$ $a\times(b\times c)=$ $=(a\times b)\times c$	Операции ассоциативны
R	Разрешимость	$a+x=b$ $a\times x=b$	Уравнение относительно x всегда разрешимо при любых a и b при условии, что $a\neq 0$ в случае умножения
E	Существование единичных элементов	$a+0=a$ $a\times 1=a$	Существует единичный элемент для сложения (0) и для умножения (1)
D	Дистрибутивность	$a\times(b+c)=$ $=a\times b+a\times c$	Умножение дистрибутивно относительно сложения

Прежде всего допустим, что нам дан класс или множество элементов a, b, c,... Этот класс упорядочен, то есть подчиняется трем указанным выше постулатам. Далее, положим, что нам даны две операции, которые обозначаются соответственно знаками + и —; наконец, мы распространяем на эти символы условия, перечисленные в табл. 4.

[1] Слово «scared» (буквально — «испуганный») образовано из начальных букв названий шести постулатов обычной алгебры, приведенных автором (см. табл. 4). — *Прим. ред.*

Из постулатов выводятся все теоремы алгебры. Все сложные положения (propositions), заполняющие работы по алгебре действительных чисел, выводятся из этой совокупности простых утверждений (statements), и все алгебраические теоремы могут быть сведены к постулатам, приведенным в табл. 4. Харкин указывает, что элементарные правила алгебры, которые изучаются в средней школе, такие, как правило сокращения на общий множитель или правило переноса в другую часть уравнения и т. п., непосредственно вытекают из этих основных допущений. Эти правила выступают в качестве *теорем,* выведенных из постулатов табл. 4.

Определения, постулаты и теоремы

Для удобства изложения следует различать *определения, постулаты* и *теоремы.* В такой формальной системе, как алгебра, отличительные особенности этих трех категорий достаточно ясны. При помощи определений мы вводим в систему новые знаки и устанавливаем их отношения к прежним, уже получившим объяснение знакам. Так, $a^n = a \times a \times a...$ («n» сомножителей) является определением, используемым для введения в систему знака показателя степени. Постулаты представляют собой такие утверждения о знаках, операторах и их отношениях, которые принимаются без доказательства. Теоремы же — это утверждения, выведенные путем такого сочетания знаков, которое согласуется с принятыми постулатами и определениями.

В такой эмпирической науке, какой является психология, мы сталкиваемся с ситуацией, в некоторых отношениях аналогичной положению той, которая имеет место в математике. Формальным определениям математики в психологии соответствуют эмпирические определения (семантические правила), привлекаемые с целью соотнесения слов или символов с объектами или событиями. Формальным постулатам здесь обычно соответствуют гипотезы, то есть эмпирические утверждения, относящиеся к терминам, уже получившим определение. Теоремам же соответствуют эмпирические положения, выведенные из гипотез.

В отличие от теорем формальной системы, которые подвергаются только одной проверке — проверке их непротиворечивости постулатам и определениям этой системы, эмпирические положения науки подлежат дополнительной проверке и должны получить либо эмпирическое подтверждение, либо эмпирическое опровержение.

Все сказанное выше представляется достаточно ясным, но дело в том, что в наших учебниках не всегда четко и правильно проводят различие между рассмотренными понятиями. Многие утверждения имеют внешний вид эмпирических положений, в то время как в действительности они являются определениями. Отсюда проистекает масса недоразумений. Правильное упорядочение может быть проиллюстрировано следующей парадигмой:

Определение: Инстинкт есть стереотипная форма реакции.
Определение: Кошка есть четвероногое млекопитающее.
Гипотеза: У кошек есть инстинкты.
Эмпирическая проверка: Наблюдаются ли у кошек примеры стереотипного поведения?

Приведенные определения являются семантическими правилами. В них раскрывается произвольная конвенция, касающаяся нашего словоупотребления. Поскольку мы дали произвольные определения словам «кошка» и «инстинкт», нашим же делом является высказывание утверждений относительно них. Эти последние представляют собой эмпирические положения, отличающиеся от формальных теорем, и их обоснованность должна быть проверена путем наблюдения.

Но посмотрим, что получится, если автор начинает с утверждения: «У кошек есть инстинкты». С чем он в действительности имеет дело: с определением или с индуктивным положением? Может быть как то, так и другое, и, если автор не уточняет, что он имеет в виду, мы не можем решить, является ли высказанное им «истинным по определению» или же оно должно быть подвергнуто операциональной проверке.

Достойно удивления, как часто мы в психологии выдвигаем псевдопроблемы только потому, что смешиваем определения (семантические или синтактические утверждения) с эмпирическими положениями. Анализ конкретного случая, когда ученый заблудился в словесной чаще, потому что синтактические и семантические правила оказались у него скрытыми в предложениях, имеющих внешний вид эмпирических положений, дается у Стивенса (см. Стивенс, 1939а, стр. 251 и далее).

Продолжая проводить аналогию между наукой и применяемыми в алгебре методами постулирования, рассмотрим так называемый *гипотетико-дедуктивный* метод эмпирического исследования, который получил широкое признание в результате убеждения, что наука должна развиваться скорее по пути, указанному Галилеем, чем по пути, указанному Аристотелем. Применяя научный метод в его наиболее правильной форме, мы сначала выдвигаем гипотезу, затем выводим из нее следствия и, наконец, находим им подтверждение или опровержение. С этой целью мы выбираем какую-нибудь формальную модель — математическую, логическую или просто лингвистическую — и находим в ней соответствующую совокупность символов. При помощи семантических правил мы связываем эти символы с наблюдаемыми событиями или объектами, а затем упорядочиваем их в форме уравнения или положения (гипотезы). Затем мы используем *синтактические правила* преобразования формальных систем символов и переходим к дедукции. Иначе говоря, мы применяем синтактические правила преобразования и тем самым превращаем первоначальное уравнение или положение (гипотезу) в некоторое другое уравнение или положение (выведенное посредством дедукции), не противоречащее первоначальному. Наконец, мы соотносим эти результаты дедукции с наблюдаемыми событиями при помощи семантических правил, а сделав это, мы получаем возможность подвергнуть выведенные уравнения или положения экспериментальной проверке.

Главное различие между применяемым в алгебре методом постулирования и гипотетико-дедуктивным методом науки связано с тем, что последняя включает в себя рассмотрение эмпирического материала. В науке мы можем проверить результаты нашей дедукции, сопоставляя их с изучаемыми природными объектами. Для математики факты мира природы не имеют никакого значения. Мы не можем доказать положения алгебры путем анализа с помощью микроскопа.

Необходимо, однако, отметить, что и в процессе научной дедукции из эмпирических гипотез сам процесс выведения проводится на формальном уровне. Дедукция состоит в преобразовании предложения в соответствии с правилами синтактики. Когда гипотеза представляет собой уравнение, а синтактические правила являются законами алгебры, тогда весь образ действий, без сомнения, именно таков, каким мы его охарактеризовали выше. Когда же гипотеза представляет собой предложение на английском языке, в котором правила синтаксиса не столь ясно выражены, мы часто производим дедукцию, обладая лишь далеко не полным знанием используемой нами «логики». Тем не менее, если мы последовательны, мы используем некоторую совершенно определенную логику, и процесс, называемый нами дедукцией, есть не что иное, как процесс выполнения правил этой логики.

К счастью для тех теорий, которые будут строиться на достижениях науки в областях, связанных с применением методов, отличных от количественного анализа, процесс формализации логики, превращающий ее в исчисление символов, продвигается в настоящее время довольно быстро. Эта современная логика «дает четкие технические приемы манипулирования самыми основными элементами рассуждения. Можно полагать также, что ее значение для науки состоит и в том, что она вносит строгость и ясность в научные понятия, делая их более точными» (Куайн, 1947, стр. 8). Эрудированному психологу будущего понадобится, по-видимому, знание и русского языка и какого-либо универсального языка или пазиграфии, подобной символической логике.

Понятие группы

Рассмотрим теперь некоторые другие вопросы из той области, которую Рассел называет философией математики, противопоставляя ее математике как практическому искусству обращения с математическими символами и операциями. Углубляясь в самое основание предмета изучения, с тем чтобы вскрыть, какие понятия являются фундаментальными, мы приходим, как уже видели выше, к некоторым очень простым и в то же время плодотворным идеям. Очевидность некоторых из этих понятий отнюдь не умаляет их важности. Здесь уместно привести слова Д'Арси Томпсона, писавшего, что физика «...заставляет нас вспомнить о том, что ...великие люди посвящали себя ей для того, чтобы открыть простые вещи» (Д'Арси Томпсон, 1942, стр. 13). То же самое можно, конечно, сказать и о математике.

Два из наиболее фундаментальных понятий математики были упомянуты выше. Это понятия *класса* элементов и взаимно-однозначного соответствия, или *изоморфизма*. Третьим является понятие математической *группы*, а четвертым — тесно связанное с ним понятие *инвариантности*. Прежде всего мы постараемся уяснить, что математики имеют в виду под группой.

Теория групп существует немногим более ста лет, но она уже осветила многие проблемы как алгебры, так и геометрии. Быть может, эта теория не представляет собой своего рода «сезам, откройся» [то есть средства разрешения всех проблем. — *Ред.*], как это думали в период расцвета ее славы, когда доказательство того, что какая-либо теория подчиняется постулатам теории групп, рассматривалось как важное достижение (ср. Белл, 1945, стр. 445). Однако группа — это все же очень важное понятие. В ходе дальнейшего изложения мы еще будем использовать его при рассмотрении проблемы подыскания шкал для измерения. Группа в математике есть множество *операций*. Эти операции делает группой тот факт, что две операции, следующие одна за другой, *приводят к такому же результату, к какому могла бы привести некоторая третья операция*. Это, конечно, весьма расплывчатое определение, и мы вынуждены будем придать ему более определенный вид, рассмотрев один пример.

Возьмем порядок игры бейсбольной команды. В ней имеется девять игроков, расставляемых на поле в таком порядке, который тренер находит наиболее целесообразным. Допустим, что игра команды разладилась и тренер считает необходимым изменить игровой порядок в команде. Он делает это путем перестановки игроков. Ясно, что каждый из 362 880 [= 9! — *Ред.*] возможных порядков может быть получен следующим образом: приняв какой-либо один порядок расположения игроков за исходный, тренер изменяет его, последовательно переставляя в этом порядке одного игрока на место другого. Он может поставить центрального нападающего на место защитника (место № 4) путем замены первого вторым, затем второго третьим и, наконец, третьего четвертым. Таким способом центральный нападающий оказывается на месте № 4. Затем с целью передвижения защитника (который теперь занимает место № 3) на место № 1 тренер должен поменять местами находящихся на № 3 и 2, а также № 2 и 1. В результате этих пяти отдельных перемещений получается такой же игровой порядок, который получился бы в том случае, если бы тренер просто поменял местами игроков № 1 и 4.

Отсюда мы видим, что некоторые комбинации операций эквивалентны другим комбинациям операций.

На неспециалиста все это производит впечатление тривиальной и очевидной истины, и его очень удивляет, что это простое понятие, лежащее в основе теории *групп перестановок*, оказалось для Э. Галуа крайне важным при решении им давно уже стоявшей перед математиками задачи о разрешимости уравнений. Эти простые группы перестановок находят себе применение даже в современной физике — при описании структуры атома.

Мы вводим понятие группы таким же способом, какой уже использовали в алгебре, а именно устанавливаем постулаты (требования), которым должно удовлетворять множество операций, для того чтобы его можно было бы назвать «группой».

Прежде всего мы допускаем, что нам дано множество элементов (операций) a, b, c... и символ $\circ$, обозначающий их комбинацию. Далее мы полагаем, что это множество подчиняется перечисленным в табл. 5 постулатам [1] (ср. Харкин, 1941, стр. 98).

В частном случае, когда $a \circ b = b \circ a$, группа является обладающей свойством коммутативности, или абелевой группой (названной так по имени талантливого норвежского математика Н. Абеля). Если в табл. 5 включить постулат коммутативности, то она станет весьма похожей на табл. 4 (таблицу постулатов обыкновенной алгебры), и по сравнению с ней будет недоставать лишь постулата дистрибутивности. Последний отсутствует в табл. 5 потому, что он не нужен для определения группы, будь то группа Абеля или какая-либо другая группа.

В табл. 4 имеются по меньшей мере две действительно интересные группы. Например, действительные числа образуют группу относительно действия сложения. Знак $\circ$, применявшийся при формулировании постулатов теории групп, заменяется в группе относительно сложения знаком $+$, а сами числа могут рассматриваться как ее элементы вместо *операций*. Так, $3 + 4 = 7$ может быть интерпретировано следующим образом: если вы пройдете сначала 3 шага, а затем еще 4, то это равносильно продвижению на 7 шагов; то есть операции могут комбиниро-

[1] Последние два из этих постулатов иногда заменяются одним постулатом, сформулированным в другой форме, как, например: для каждых a и b существуют x и y такие, что $a \circ x = b$ и $y \circ a = b$ (ср. Белл, 1945, стр. 215).

ваться. В группе относительно сложения единичным элементом является нуль, то есть $a + 0 = a$, а обратным элементом для a является противоположное число $-a$, то есть $a + (-a) = 0$. Если группа относительно сложения подчиняется коммутативному закону (см. второй постулат в табл. 4), то она представляет собой абелеву группу.

Таблица 5

Постулаты теории групп

Синтез	Если a и b суть элементы множества операций, то $a \circ b$ принадлежит к этому же множеству	Этот постулат показывает, что группа замкнута
Ассоциативность	Для любых трех элементов множества $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$	Этот постулат показывает, что группа ассоциативна
Существование единичного элемента	Существует единственная единичная операция, такая, что $a \circ i = i \circ a = a$	Этот постулат показывает, что одна операция должна ничего не изменить, или быть ей эквивалентной
Обратимость	Для каждой операции a существует единственная обратная операция a' этого же множества, такая, что $a \circ a' = i$	Этот постулат показывает, что всегда можно произвести действие обратное данному, и получить результат данной операции

Аналогичным образом действительные числа (исключая нуль) образуют абелеву группу относительно умножения. В этом случае идентифицирующим элементом является 1, так как $a \times 1 = a$, инвертирующим же элементом для a является обратное число $\frac{1}{a}$, то есть $a \times \frac{1}{a} = 1$.

Весьма любопытно, что относительно некоторых из обычных арифметических операций нельзя образовать группы. Вычитание, например, не удовлетворяет требованиям, перечисленным в табл. 5, так как оно не ассоциативно. По той же причине нельзя образовать группы и относительно деления. Если бы мы оперировали только с положительными числами, как это было до Декарта, то даже относительно действия сложения нельзя было бы образовывать группы, так как без отрицательных чисел обращение было бы невозможным.

Многие различные виды операций образуют группы (ср. Бэркхофф и Маклейн, 1941). Таковы группы перестановок игроков в игровых порядках, электронов, вращающихся вокруг атомного ядра, или других *порядков* вещей. С одной стороны, существуют такие формы вращения объектов в пространстве, которые напоминают вращение колеса с шестью спицами. При каждом повороте на 60 градусов область пространства, ограниченная двумя соседними спицами и внешним краем колеса, остается неизменной (инвариантной), и эти повороты на 60 градусов составляют конечную группу, в которой поворот на 360 градусов эквивалентен тождественной операции — операции невращения. С другой стороны, все возможные движения твердого тела в пространстве образуют бесконечную группу.

Возможно, наибольший интерес с точки зрения измерения представляют такие группы, в которых элементами (операциями) служат алгебраические преобразования. Повседневно производимые операции умножения на постоянную величину для перехода от дюймов к футам, ярдам, сантиметрам, милям и т. д. являются простейшим случаем таких преобразований. Эти операции принадлежат к группе *подобия,* и следует отметить, что, когда она применяется к измерению расстояний, свойство, остающееся инвариантным, является *отношением* расстояний. Другие группы преобразований будут указаны при рассмотрении шкал измерений.

Между тем необходимо сказать несколько слов относительно термина *операция.* В предыдущих параграфах он употреблялся в двух различных значениях: во-первых, он обозначал математическую манипуляцию (например, умножение) и, во-вторых, конкретное эмпирическое действие (например, поворот колеса на 60 градусов). И то и другое мы называем операцией, однако эти понятия, очевидно, принадлежат к совершенно различным областям: одно из них относится к сфере формального, а другое — к физическим процессам. Быть может, употребление двух различных слов послужило бы установлению большего порядка, однако этому мешает прочно укоренившаяся традиция, и самое большее, что мы можем сделать, — это лишь постоянно помнить о том, что математические операции могут служить моделью для физических событий, но модель и событие — отнюдь не одно и то же.

Понятие инвариантности

Мы уже отмечали, что при преобразованиях очень важным является то, что не преобразуется, то есть остается инвариантным. В течение последнего столетия большое значение инвариантности было доказано и в алгебре, и в геометрии, и в теоретической физике, а иногда это понятие употребляется и в психологии. Э. Белл посвящает этому вопросу главу в девять страниц в своей книге «Развитие математики» (Белл, 1945), начиная его изложение следующей цитатой из Кейсера: «Инвариантность — это неизменность среди изменяющегося, постоянство в мире текучего, устойчивость формы, остающейся одной и той же, несмотря на вихри и удары бесчисленного множества самых причудливых преобразований».

На огромное значение этого простого принципа обратил внимание (в 1841 году) один из величайших математиков-самоучек Джордж Буль, являющийся также основоположником символической логики. Дж. Буль работал над тем, что носит название *алгебраической инвариантности,* сущность которой психологам, не являющимся одновременно и математиками, понять крайне трудно. Но в других областях знания, таких, как геометрия или физика, обнаружение инвариантности не является столь сложной задачей.

Начертите на плоском куске резины какую-нибудь фигуру, образованную пересекающимися прямыми и кривыми, а затем растяните или деформируйте этот кусок каким угодно образом. Площади, длины отрезков и величины углов, очевидно, не останутся инвариантными, но коечто останется. Хотя резина и деформирована, порядок взаимных пересечений линий, образующих фигуру (этот порядок может быть прослежен при последовательном переходе от одной области к другой), и общность границ между различными областями — эти два свойства остаются неизменными. Изучение инвариантности в геометрии «резиновых форм» входит в задачу обширной и очень трудной отрасли математики, называемой *топологией*. Это неметрическая геометрия, и, поскольку она, по-видимому, имеет дело с отношениями, освобожденными от бремени величины, у некоторых психологов появилась надежда, что топология может удовлетворить потребность в формальной модели для репрезентации объектов, которые не могут быть измерены. Топология, возможно, получит здесь плодотворное применение, но, для того чтобы охватить социальную динамику, необходимо, по-видимому, нечто большее, чем освобождение от метрики. Во всяком случае, если из приложений математики следует вывести нечто поддающееся эмпирической проверке, то должен быть представлен эмпирически известный материал.

Важность инвариантности как орудия мысли может быть проиллюстрирована на примере классического понятия о сохранении энергии. Общая величина энергии системы остается одной и той же при ее переходе из одной формы, например теплоты, в другую форму, например электричество. Подобным же образом то, что мы подразумеваем под *формой* и *величиной* твердых тел, — это такие свойства, которые не изменяются при изменении или преобразовании системы координат, при помощи которой мы описываем данный объект. Вообще можно сказать, что задачей физики является описание явлений природы в таких терминах, которые не изменяются, когда мы переходим от одной системы отсчета к другой.

Поясним эту мысль одним примером. Второй закон Ньютона приравнивает силу первой производной от количества движения по времени. Физики проверяют этот закон в различных системах отсчета и находят, что он оказывается справедливым. Закон этот не имел бы никакой ценности, если бы он был действительным только в Европе или только на уровне моря, только для вращательного движения или же только для объектов, крупнее слона по своим размерам. Инвариантность этого закона для широкого круга условий — источник его могущества.

Ученый обычно ищет инвариантную величину, независимо от того, знает он ее или нет. Когда он открывает функциональную зависимость между двумя переменными, то вслед за этим перед ним, естественно, возникает вопрос, при каких условиях эта зависимость имеет силу, или, другими словами, при каких преобразованиях она инвариантна. Поиски инвариантных отношений представляют собой, по существу, стремление к обобщению, а в психологии, так же как и в физике, наиболее ценными являются те принципы, которые имеют более широкое применение.

Заключение, к которому мы осмеливаемся прийти, состоит в том, что ученый — специалист в области эмпирических наук может еще в большей степени, чем математики, следующие Дж. Булю, стремиться к нахождению неизменного, то есть к поискам единообразного во многообразном и к установлению инвариантов.

Многие психологические проблемы также рассматриваются уже с точки зрения сознательных поисков инвариантностей [1]. Возможно, что все психологические проблемы, по крайней мере те из них, в которых

[1] Отметим, например, как отчетливо Тёрстон (1947, гл. 16) делает «инвариантность» формообразования центральным пунктом широко используемого факторного анализа. На материале весьма сильно отличающихся друг от друга областей также можно видеть, насколько успешно анализ факторов, детерминирующих «инстинктивное» поведение, сводится к проблеме инвариантности реакции в условиях изменения окружающих условий (ср. там же, гл. 12). Например, черноголовые чайки продолжают сидеть в гнезде даже тогда, когда лежащие в нем яйца раскрашены в разнообразные цвета или заменены деревянными моделями различного размера и формы с разными запахами. И только в том случае, когда у «яиц» угловатые очертания, этот инвариант поведения нарушается.

непосредственно затрагиваются основные принципы, должны быть истолкованы именно таким образом. Ум, склонный вдаваться в частности, может отметить, что зрительные раздражители характеризуются определенной величиной порога, что два человека константно воспринимают величину предмета обладающего одной и той же величиной и что вспыхивающие один за другим огни кажутся движущимися. Ум же, склонный к обобщениям, сопоставит эти явления с более широким кругом вопросов и обнаружит, во-первых, кривую яркости света или кривую видимости — инвариант порога в условиях одновременного преобразования частоты и интенсивности; во-вторых, эффект константности воспринимаемой величины (относительную инвариантность воспринимаемой величины в условиях изменения расстояния, окружающей среды и т. д.); в-третьих, условия для оптимального фи-феномена (частичной инвариантности восприятия движения, известной под названием законов Корте).

Вообще же мы расширяем сферу инвариантности, исследуя результаты влияния параметров. Так, например, мы можем взяться за исследование порога тонов и найти для заданной частоты такую силу звука, при которой наступление слышимости или же ее отсутствие может выражаться одним и тем же числом. Это и есть инвариантная *точка*. Тогда мы изменяем частоту и получаем *кривую* порогов для всего диапазона слышимости. Это инвариант для двух параметров: частоты и силы звука. Следующим шагом может быть изменение еще одного измерения, например длительности тона, и в зависимости от результатов мы можем образовать в трех измерениях такую *поверхность*, которая выражает инвариант порога для трех параметров. Возраст человека, воспринимающего звук, может служить четвертым параметром, степень его тренированности — пятым и т. д. Расширяя сферу этого процесса, мы все больше и больше вторгаемся в ту безличную область, которую обычно относят к общей категории, называемой изменчивостью. Нельзя сказать, что понятие об изменчивости совершенно изгнано из эмпирических наук. Однако благодаря последовательному расширению области инвариантности область изменения может быть сведена к отношениям, легко поддающимся анализу.

В качестве иллюстрации из другой области рассмотрим коэффициент умственной одаренности — IQ. Почему он является одним из основных понятий психологии и педагогики? Конечно, если понятие IQ было бы таким же неустойчивым, как и дамские моды, то в психологии было бы одним случайным явлением больше. Тот факт, что оно остается относительно постоянным в течение многих лет, служит основанием для горячих споров. В этом отношении IQ аналогичен понятию соматотипа, характеризующему морфологию человека при помощи трех переменных, или компонентов, величины которых определяют основные особенности физической конституции данного индивида. Именно инвариантность соматотипа в процессе изменения, который мы называем старением, делает это понятие потенциально полезным для характеристики человеческих существ (ср. Шелдон, Стивенс и Тэкер, 1940). *Абсолютная инвариантность* IQ и соматотипа не является необходимой, для того чтобы эти два понятия имели полезное применение. Однако *некоторой* степенью инвариантности они, по-видимому, обязательно должны обладать. Чем шире пределы их инвариантности, тем большее значение они приобретают, так как при изучении человека исследователь стремится найти такие измерения, которые остаются неизменными даже в том случае, когда он отказывается от решения вопроса.

Однако излишне говорить о том, что в значительной части психологических исследований их авторы, по-видимому, не приходят к выявлению весьма важных инвариантов. Очевидно. при изучении многих явлений установление условий инвариантности дало бы нам возможность получить все необходимые сведения об изучаемом предмете, но не менее очевидно и то, что эксперимент сам по себе является достаточно трудным делом.

ЧИСЛОВЫЕ ФОРМЫ И ИЗМЕРЕНИЕ

Вернемся к проблеме измерений.

Прежде чем использовать в психологии математический аппарат, мы должны установить шкалы измерений. Я мог бы не приводить здесь этих банальностей, если бы не то обстоятельство, что мы, говоря иногда на языке функциональных связей и используя выражения «больше» или «меньше», по-видимому, не понимаем того скрытого смысла, который имеют наши высказывания. Мы можем сказать, например, что чем больше человек испытывает чувство неосуществимости своих чаяний, тем агрессивнее он становится. Если перенести это простое предложение на язык формул, то мы получим соотношение

$$A = kЧ,$$

то есть агрессивность (A) пропорциональна (k) чувству неосуществимости чаяний ($Ч$). Это соотношение представляет известный интерес, и мы охотно подвергли бы его проверке. Последняя могла быть произведена просто и автоматически, если бы у нас была шкала для измерения агрессивности и отличная от нее шкала для измерения чувства неосуществимости чаяний. Каждая из этих шкал, если устанавливается *пропорциональная* зависимость, должна быть шкалой *отношений*. Если же мы желаем установить менее ограниченную зависимость, то можно было бы использовать лишь шкалы *порядка* или *интервалов*.

Сформулировать требования, предъявляемые к измерению, конечно, легче, чем их реализовать. Но это еще не свидетельствует о том, что значение измерения нам всегда ясно. По словам одного из видных представителей физической науки, «...наиболее выдающиеся физики, пытаясь подвергнуть [понятие измерения] логическому анализу, оказались способными лишь внести в него путаницу; быть может, об измерении было сказано больше бессмыслицы [1], чем по любому другому вопросу из области физики» (Кэмпбелл, 1938). Принимая во внимание это резкое предупреждение, попытаемся разобраться в данном вопросе возможно внимательнее.

По-видимому, не будет ошибкой сказать, что измерение включает в себя процесс установления связи формальной модели, называемой числовой системой, с некоторыми, выделяемыми в ходе исследования аспектами объектов или событий. Эта мысль, уже высказанная в самом начале данной главы «Измерение есть приписывание числовых форм объектам или событиям в соответствии с определенными правилами» [см. стр. 19—20 настоящего издания.— *Ред.*], — представляет собой перефразированное утверждение самого Кэмпбелла (Кэмпбелл, 1940;

[1] Читатель, пожелающий ознакомиться с некоторыми примерами такого рода бессмыслицы (к которым сам Кэмпбелл прибавляет, по-видимому, значительную долю своих собственных), может найти их в прениях Комитета по рассмотрению вопроса об измеримости ощущений, назначенного Британской ассоциацией содействия развитию науки (ссылки на них см. Кэмпбелл, 1940). Более подробный анализ вопросов, обсуждавшихся в этом комитете, см. в работе Риза (Риз, 1943).

ср. Стивенс, 1946). Рассел, по-видимому, придерживается такой же концепции, когда говорит:

«Измерением величин, понимаемым в самом широком смысле, является любой метод, при помощи которого устанавливается взаимно-однозначное соответствие между всеми или некоторыми величинами определенного типа, с одной стороны, и всеми числами: целыми, рациональными или действительными в соответствующих случаях — с другой... Измерение требует установления взаимно-однозначного соответствия между числами и измеряемыми величинами, то есть отношения, которое может быть, в зависимости от обстоятельств, как непосредственным, так и опосредованным, как важным, так и второстепенным» (Рассел, 1937, стр. 176).

Оба определения, и Кэмпбелла и Рассела, превосходны при условии, что мы берем их буквально такими, как они сформулированы, и оба автора утверждают, по-видимому, одно и то же, за тем исключением, что Кэмпбелл применяет термин «numeral» [«числовая форма»], а Рассел — «number» [«число»]. Оба определения весьма широки и свободны, они действительно свидетельствуют о той «щедрости», от которой оба автора впоследствии отказались, притом на различных основаниях. Однако вопрос об этом отступничестве мы здесь рассматривать не будем.

Применяя два различных термина — «числовая форма» и «число» — для обозначения того, что соотносится с объектами при помощи семантических правил, Кэмпбелл и Рассел имели в виду, по всей вероятности, одно и то же. Во всяком случае, я предпочитаю термин Кэмпбелла, поскольку термин «число» весьма часто является двусмысленным по своему значению. Кроме того, он иногда относится к физической характеристике некоторой совокупности дискретных объектов (например, такое-то число земляных орехов), иногда — к классу равномощных множеств Фреге (количественные числа), а иногда к расселовским выражениям отношений (числам отношений, для которых порядковые числа образуют подкласс). Я полагаю, что числа, которые Рассел предлагает применять при измерении, — это числа отношений.

Термин «числовая форма» имеет тот недостаток, что в одних случаях он обозначает физический знак, образованный чернилами на листе бумаги, а в других по существу выражает *логическое* отношение, которое репрезентируется этой числовой формой. Второе значение соответствует взглядам на математику представителей школы формализма, рассматривающих арифметику как систему правил, которым подчиняются числовые символы, причем «форму последних мы узнаем с уверенностью независимо от места и времени их использования, от особых условий их изображения и незначительных различий в их изображении» (цит. из Гильберта по работе: Вейль, 1949, стр. 35). По-видимому, и Кэмпбелл также имеет в виду это второе значение, вероятно совпадающее с тем значением, которое приписывает своему термину Рассел. Во всяком случае, два факта несомненны. Во-первых, существует необходимость в некоторых новых и однозначных терминах для каждого из этих различных значений [1]. (Но поскольку привычка в употреблении все

[1] Пытаясь провести различие между количественной характеристикой групп объектов (числом не в строго математическом смысле) и «субъективным» аспектом или характеристикой, применяемой нами к совокупности предметов, которые мы наблюдаем, но не сосчитываем, я использовал термины «численность» («numerosity») и «множественность» («numerousness») (Стивенс, 1936 b). Тейв (1941) производил эксперименты по выяснению отношения между зрительным восприятием множественности и физической численностью.

еще дает себя чувствовать, введение новых терминов, по всей вероятности, натолкнется на сопротивление.) Во-вторых, какие бы термины мы ни избрали, сущность измерения состоит в том, что мы приписываем (определенным сторонам объектов или событий) элементы формальной системы, к которой приложимы постулаты алгебры (см. табл. 4). Это приписывание производится в соответствии с одним из тех правил, которые мы рассмотрим ниже.

Шкалы измерений

Всякое правило приписывания числовых форм (чисел) определенным сторонам объектов или событий создает некоторую *шкалу*. Шкалы эти возможны прежде всего потому, что существует изоморфизм между свойствами числовых рядов и эмпирическими операциями, которые мы можем производить со сторонами физических объектов. Этот изоморфизм является, конечно, лишь частичным. *Не все* свойства чисел и *не все* свойства объектов могут быть приведены во взаимно-однозначное соответствие. Только *некоторые* свойства объектов могут быть связаны при помощи семантических правил с *некоторыми* свойствами числовых рядов.

В частности, имея дело с отдельными аспектами объектов, мы можем привлечь эмпирические операции для определения равенства (служащего основой для классификации предметов), для упорядочения по разрядам, а также для определения равенства разностей и равенства отношений величин различных сторон объектов. Обычные ряды числовых форм, то есть такие ряды, в которых для каждого элемента по определению существует элемент, следующий за ним, подвергаются аналогичной операции: мы можем опознавать элементы ряда и классифицировать их. Их порядок нам известен как данный по условиям конвенции. Мы можем определить равные разности, например $7—5 = 4—2$, и равные отношения, например $10 : 5 = 6 : 3$. Этот изоморфизм формальной системы и эмпирических операций, производимых с материальными предметами, оправдывает использование формальной системы в качестве *модели*, репрезентирующей определенные аспекты эмпирического мира.

Тип шкалы, образуемой в тех случаях, когда числовые формы применяются как репрезентирующие состояние предметов природы, зависит от характера основных эмпирических операций, производимых с этими предметами.

Обычно указанные операции ограничены специфическими свойствами тех объектов, которые подвергаются измерению, и нашим выбором конкретного способа измерения, но, будучи раз установленным, этот способ определяет, шкала какого именно типа должна быть использована: шкала *наименований*, шкала *порядка*, шкала *интервалов* или шкала *отношений*. Каждый из этих четырех типов шкал лучше всего характеризуется соответствующей областью инвариантности, а значит, видом преобразований, при которых «структура» шкалы не нарушается. Характер же инварианта налагает ограничения на те виды статистических манипуляций, которые на законном основании могут применяться к измеряемым данным. Этот вопрос о приложимости тех или иных статистических методов имеет для некоторых наук большое практическое значение.

Таблица 6

Шкалы измерений

Для создания каждой данной шкалы необходимо произвести все основные операции, перечисленные во второй колонке, начиная с самой верхней и кончая операцией, указанной против названия шкалы. В третьей колонке приводятся те математические преобразования, при которых форма шкалы остается инвариантной. Вместо любой числовой формы x *на шкале может быть подставлена другая числовая форма* x', *где* x' *есть функция от* x, *как указано в третьей колонке. В четвертой колонке перечислены в том же порядке сверху вниз некоторые статистические операции, остающиеся инвариантными при преобразованиях, указанных в третьей колонке.*

Шкала	Основные эмирические операции	Математическая групповая структура	Допустимая статистика (инвариантная)	Типичные примеры
Шкала наименований	Установление равенства	Группа перестановок $x' = f(x)$, где $f(x)$ означает любую взаимно-однозначную подстановку	Число случаев Мода Корреляция случайных событий	Нумерация футболистов Приписывание чисел типов или моделей классам
Шкала порядка	Установление отношений «больше» или «меньше»	Изотоническая группа $x' = f(x)$, где $f(x)$ означает любую монотонно-возрастающую функцию	Медиана Процент или Порядковая корреляция (Тип 0)	Твердость минералов Качество кожи, шерсти, пиломатериалов и т. д. Приятность запахов
Шкала интервалов	Установление равенства интервалов или разностей	Общая линейная группа $x' = ax + b$	Среднее Среднее квадратичное отклонение Порядковая корреляция (Тип 1) Корреляция смешанного момента	Температура (по Фаренгейту и Цельсию) Энергия Календарные даты «Нормальные отметки» в тестах на «достижения»
Шкала отношений	Установление равенства отношений	Группа подобия $x' = ax$	Геометрическое среднее Коэффициент изменения Преобразование децибелы	Длина, вес, плотность, сопротивление и т. д. Шкала высоты звука (*mels*) Шкала громкости звука (*sones*)

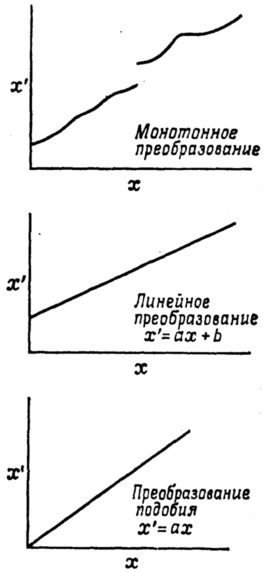
Основные факты, касающиеся шкал, подытожены в табл. 6[1].

Следует отметить, что колонка, в которой перечислены основные операции, необходимые для создания каждого типа шкалы, является сводной: к операции, указанной против названия шкалы, должны быть добавлены все предшествующие операции. Таким образом, шкала интервалов может быть получена только в том случае, если уже имеется операция для определения равенства интервалов, для определения отношений «больше» и «меньше» и для определения равенства («не больше и не меньше»). Если необходимо получить шкалу отношений, то к указанным выше операциям должен быть добавлен еще метод установления равенства отношений.

В колонке, содержащей групповые структуры каждой шкалы, перечислены математические преобразования, при которых форма шкалы остается инвариантной (см. фиг. 1).

Так, любая числовая форма x на шкале может быть заменена другой числовой формой x', где x' есть функция от x, указанная в этой колонке. Каждая упомянутая в колонке математическая группа входит в группу, приведенную непосредственно над ней.

В четвертой колонке даются примеры типов статистических операций, свойственных каждой шкале. Эта колонка является сводной, так что *все* перечисленные в ней статистические операции допустимы для данных, указанных против шкалы отношений. Критерием пригодности той или иной статистической операции является ее *инвариантность* при преобразованиях, указанных в третьей колонке. Так, признак, находящийся на медиане распределения (средняя точка), остается в этом «среднем» положении при всех преобразованиях, сохраняющих порядок («изотоническая группа»), но признак, находящийся на среднем, сохраняет свое положение лишь при преобразованиях, ограниченных в такой степени, в какой это имеет место для линейных групп. Отношение, выраженное коэффициентом изменения, остается инвариантным только при преобразовании подобия (умножение на постоянную).



Фиг. 1. Графические примеры на три группы преобразований.

Монотонно-возрастающая функция, могущая иметь разрывы такого типа, который представлен на первом графике, принадлежит к изотонической группе и представляет собой преобразование, приложимое к шкале порядка. Линейное преобразование, график которого пересекает ординату в точке, соответствующей $x' = b$, приложимо к шкале интервалов. Шкала отношений допускает только преобразование подобия (умножение на постоянную величину).

[1] Классификация, совпадающая в своих существенных чертах с той, которая дается в табл. 6, была предложена автором на Международном конгрессе за единство науки в сентябре 1941 года (по этому вопросу см. Стивенс, 1946). Существо вопроса об отношении шкал измерения к группам преобразований излагается также Нейманом и Моргенштерном (1947, стр. 22—23) в их книге по теории игр и утилитарного поведения. Однако они даже не упоминают о группе, соответствующей шкале наименований, и уделяют особое внимание группе, в которой не допускаются никакие преобразования, то есть такому случаю, где в условиях группы подобия значения a ограничены единицей.

Отметим, что здесь имеется два типа инвариантности. Если рассматриваемые статистические показатели не имеют размерности[1], как, например, коэффициент корреляции смешанного момента, коэффициент изменения и т. д., то их числовое значение остается фиксированным, когда шкалы подвергаются всем допустимым преобразованиям. Но когда статистические признаки имеют размерности (например, среднее, медиана и т. д.), их числовое значение изменяется в соответствии с преобразованиями, применяемыми к шкале. Так, рост *среднего человека,* выраженный в сантиметрах, есть число, отличное от числа, выражающего его рост в дюймах. Кроме того, человек (или несколько людей), чей рост является *средним,* остается тем же самым человеком (соответственно несколько людей остаются теми же самыми людьми) независимо от того, производится измерение в дюймах или в сантиметрах. Инвариантность, необходимая для таких статистических признаков, обладающих размерностью, есть поэтому тождество самому себе объекта или события, к которому относится данная статистика.

Числовое значение, которое принимает какой-либо статистический признак, зависит, конечно, как от самой статистики, так и от преобразования. Например, линейное преобразование $x' = ax + b$, осуществляемое в первоначальных единицах шкалы, дает для среднего: $m' = am + b$; для стандартного отклонения: $\sigma' = a\sigma$ и для дисперсии: $\sigma'^2 = a^2\sigma^2$.

В последней колонке табл. 6 перечислены типичные примеры для каждого типа шкалы. Интересно, что измерение многих физических величин прогрессирует от одной шкалы к другой. Когда человек определял температуру только посредством своих ощущений и оценивал предметы только как «более теплые» или «более холодные» по сравнению с другими предметами, тогда измерение температуры относилось к классу шкал порядка. С развитием термометрии оно стало относиться к шкале интервалов, а после того, как термодинамика использовала *коэффициент* теплового расширения газов для экстраполяции их объема к нулю, температура стала измеряться при помощи шкалы отношений.

Рассмотрим теперь каждую из этих шкал в отдельности, сохраняя ту очередность, которой мы придерживались выше.

Шкала наименований

Шкалой наименований представлено приписывание числовых форм объектам, связанное с наименьшими ограничениями. Числовые формы используются здесь лишь в качестве ярлыков, или типов-чисел, причем слова или буквы могут с таким же успехом применяться для этой цели. Иногда различают два типа использования числовых форм для шкалы наименований: иллюстрацией первого из них (тип А) может послужить «нумерация» игроков футбольной команды, позволяющая опознать каждого отдельного игрока; второй (тип Б) имеет место при «нумерации» типов, или классов, каждый элемент которых обозначается одной и той

[1] Размерности или их отсутствие играют большую роль в формулах физики. Факторами, не имеющими размерности, оказываются по преимуществу образованные такими отношениями, в которых размерность числителя сокращается с размерностью знаменателя, как, например, для случая с децибелами. Величинами, имеющими размерность, являются такие, как скорость (длина делится на время), площадь (длина, умноженная на длину) и т. д. В одной из своих работ Бриджмен (1931) создал род алгебры размерностей, которая оказывается весьма полезной при исследовании физических отношений. Ее основная идея состоит в том, что обе части уравнения должны быть эквивалентны по своей размерности, и противоречие в размерностях может помочь обнаружить ошибку, которую трудно вскрыть другими путями.

же числовой формой. Фактически первый тип представляет собой лишь частный случай второго, поскольку, давая отличительный номер каждому футболисту, мы тем самым уже имеем дело с единичными классами, каждый из которых образован только одним элементом. Поскольку поставленная цель достигается и тогда, когда две любые, служащие для обозначения, числовые формы замещают друг друга, то структура этой шкалы остается инвариантной в случае группы общих подстановок, или группы перестановок (иногда называемой симметричной группой преобразований). Единственным статистическим признаком, применимым к шкале наименований типа А, является число случаев, например число игроков, которым приписаны числовые формы. Но если образованы классы, имеющие несколько индивидов (тип Б), то мы можем установить наиболее многочисленный класс (моду), а при определенных условиях, применяя методы изучения случайных процессов, мы можем проверить предположения, касающиеся распределения случаев по классам.

Шкала наименований является примитивной формой, и поэтому вполне естественно, что многие считают бессмысленным придавать процессу приписывания объектам числовых форм такое же значение, что и термину «измерение» (ср. Кэмпбелл, 1938, стр. 122). Это мнение, бесспорно, правильно, ибо приписывание предметам наименований представляет собой произвольное действие. Однако тем самым мы совершаем «крещение», и использование числовых форм в качестве имен классов является примером «приписывания числовых форм в соответствии с правилом». Само же это правило таково: не приписывать одной и той же числовой формы различным классам или различных числовых форм одному и тому же классу. Все остальное вполне согласуется с требованиями шкалы наименований.

Образование *классов* объектов или событий основано на доказательстве *равенства* тех или иных характеристик. Как эмпирическая проблема, образование классов отнюдь не является простым делом, и относительно таксономических стандартов были высказаны самые различные мнения. В связи с определением любого имени нарицательного, например «лошади», возникают проблемы классификации, а именно — какие животные относятся к данной категории, а какие нет (ср. Стивенс, 1939а, стр. 233). Логическое (математическое) определение классов и равенства в формальном плане является предметом многих исследований и дискуссий. Весьма любопытно, что отношение равенства, которое выше было описано как рефлексивное, симметричное и транзитивное, оказывается настолько «ясным», что вплоть до 1930 года в работах по логике обычно не рассматривали постулаты, которым подчиняются эти важнейшие отношения (ср. Белл, 1945, стр. 578). Математика учит нас уделять внимание также и очевидному, и эмпирическим наукам никогда не придется извиняться за то, что они следуют ей в этом.

Шкала порядка

Шкала порядка возникает в результате операции упорядочения по рангам. Поскольку при любом «сохраняющем порядок» преобразовании форма шкалы остается инвариантной, эта шкала имеет структуру, которая может быть названа изотонической, или сохраняющей порядок группой. Это, конечно, большая группа, так как она включает в себя преобразования, отвечающие всем монотонно-возрастающим функциям, то есть функциям, которые никогда не убывают и поэтому не имеют максимума. Так, положительные значения измеряемых величин на шкале порядка могут быть заменены их квадратами, или их логарифмами, или любой из многих других функций, включая, в частности, «нормализирующие» преобразования, применяемые в факторном анализе (Тёрстон, 1947, стр. 368). При всех этих преобразованиях отношение «между», в котором данная величина находится с соседними с ней величинами, остается инвариантным.

Фактически бо́льшая часть шкал, широко и эффективно применяемых психологами, — это шкалы порядка. Обычная статистика, включающая средние стандартные отклонения, не должна использоваться при работе с этими шкалами, так как для применения этой статистики недостаточно знания одного лишь рангового порядка имеющихся данных. Однако такому нелегальному использованию статистики может быть дано известное прагматическое оправдание: во многих случаях оно приводит к плодотворным результатам. Хотя объявление этого приема незаконным, по-видимому, принесло бы только вред, все же следует отметить, что средние и стандартные отклонения, вычисленные на шкале порядка, содержат ошибку, которая лежит в пределах определяемых неравенством величин, характеризующих последовательные интервалы на шкале. Когда нам известен только ранговый порядок имеющихся данных, мы должны быть очень осторожны при применении статистики, а особенно в отношении сделанных на ее основе заключений.

Даже используя приемы статистики, которые обычно являются подходящими для шкал порядка, мы в некоторых случаях несколько отходим от математической строгости. Так, хотя из табл. 6 явствует, что процентили могут применяться к данным ранговых порядков, все же необходимо указать, что обычные приемы приписывания какого-либо значения процентилям при помощи линейной интерполяции в пределах интервала класса, строго говоря, ни в чем не ограничены. Подобным же образом недостаточно строгим будет и определение при помощи линейной интерполяции средней точки интервала класса, так как линейность шкалы порядка является как раз таким свойством, которое стоит еще под вопросом.

Еще одно обстоятельство нуждается в дополнительных пояснениях. В своих прежних работах (см., например, Стивенс, 1946) я выражал мнение, что корреляция ранг — порядок не может применяться к шкалам порядка, потому что решение формулы для этой корреляции предполагает допущение, согласно которому разность между элементами любых двух последовательных рангов есть постоянная величина. Мой коллега Фредерик Мостелер убедил меня в том, что эту консервативную точку зрения можно «либерализировать», то есть сделать более гибкой, если результирующий коэффициент (например, ρ Спирмэна или τ Кендолла) *интерпретировать* лишь как тестовое испытание гипотезы относительно *порядка*. Кроме того, интерпретация этого коэффциента как эквивалентного r (коэффициенту смешанного момента) предполагала бы в качестве своей основы шкалу интервалов, а также двумерное нормальное распределение. В табл. 6 я принял во внимание обе интерпретации, поместив порядковую корреляцию под двумя рубриками: тип 0 соответствует шкале порядка, а тип 1 — шкале интервалов.

Шкала интервалов

Шкала интервалов дает количественное, в обычном смысле этого слова, выражение измеряемых величин. Здесь применимы почти все обычные статистические меры, за исключением тех их видов, которые предполагают знание об «истинно» нулевой точке. Нулевая точка на шкале интервалов вводится условно или же из соображений удобства, о чем свидетельствует инвариантность формы шкалы при прибавлении постоянной величины.

Что представляет собой эта точка, можно проиллюстрировать на примере двух шкал для измерения температуры — Цельсия и Фаренгейта. Равные температурные интервалы нанесены на эти шкалы при помощи *не* равных отрезков длин; для каждой шкалы произвольно установлена нулевая точка. Численное значение по одной шкале переводится в численное значение по другой шкале при помощи уравнения вида

$$x' = ax + b.$$

Аналогичным образом и энергия измеряется при помощи шкалы интервалов, так как по утверждению Неймана и Моргенштерна, «в механике нет ничего, что позволило бы фиксировать нуль или единицу энергии» (Нейман и Моргенштерн, 1947, стр. 22). Еще одним примером могут служить наши шкалы *календарного времени.* Даты, указанные по одному из календарей, могут быть переведены в даты по любому другому календарю при помощи уравнения такого же вида. Утверждать относительно этих шкал, что одно значение измеряемой величины во столько-то раз больше другого, конечно, бессмысленно.

Периоды времени, однако, могут измеряться по шкалам отношений, причем какой-либо один период может быть точно определен как удваивающий величину другого предшествующего ему периода времени. Аналогичным образом *разности* в величине энергии (то, что мы имеем в виду под «работой») могут быть рассмотрены как относительные величины, измеримые по шкале отношений. Разности между значениями на шкале интервалов становятся мерами шкалы отношений по той простой причине, что в результате процесса определения разности (то есть в результате вычитания) мы избавляемся от постоянного слагаемого b.

При психологических измерениях по большей части стремятся создать шкалу интервалов, и в некоторых случаях это удается. Проблема обычно заключается в том, чтобы изобрести такие операции, которые позволили бы уравнять единицы шкал. Эту проблему не всегда легко решить, хотя имеется несколько возможных методов, с помощью которых можно попытаться справиться с нею. Определение того, что мы называем равными чувственными дистанциями, представляет собой довольно простой процесс. При использовании шкал в психологии вопрос о положении точки «истинного» нуля может возникнуть только в особых случаях. Умственная одаренность, например, обычно оценивается по шкале порядка, которую психологи стремятся сблизить со шкалой интервалов, и при этом нет необходимости определять, что означал нулевой уровень умственной одаренности (тем не менее и Торндайк и Тёрстон пытались это сделать).

Вариативность меры в психологии может быть сама по себе использована для уравнивания единиц шкалы. В этом процессе есть что-то «магическое» — это своего рода цирковой трюк с веревочной лестницей, при помощи которого мы взбираемся по иерархии шкал. Веревочной лестницей в этом случае служит *допущение*, согласно которому при подборе людей, подвергающихся испытанию, исследуемый психический признак характеризуется каноническим (например, «нормальным») распределением. Сделав такое допущение, уже нетрудно подобрать соответствующие единицы шкал таким образом, чтобы предполагаемое распределение действительно имело место при измерении признаков индивидов. Но этот прием, очевидно, ничем не лучше лежащего в его основе беспочвенного постулата, и нам приходится в связи с этим вспомнить высказывание Рассела относительно «воровской» стороны постулирования. Есть люди, которые считают, что психологи, делающие такие допущения, действенность которых не может быть подвергнута проверке, оказываются жертвами своих собственных козней. Однако остается фактом, что допущение существования некоторой нормы все же находит свое оправдание в том, что оно приносит определенную прагматическую пользу при измерении многих психических признаков у человека. Поскольку такие допущения подчинены определенным критериям внутренней непротиворечивости, как, например, при применении метода парного сравнения (ср. Тёрстон, 1948), они позволяют овладеть проблемой избирательности и другими проблемами, которые, по-видимому, не поддаются решению с помощью других методов.

Шкала отношений

Шкалы отношений чаще всего используются в физике. Их применение возможно только в тех случаях, когда имеются операции, позволяющие определить каждое из следующих четырех соотношений: равенство, ранговый порядок, равенство интервалов и равенство отношений. На практике определение последнего из этих четырех соотношений — равенства отношений — может принять форму установления последовательных равных интервалов, начиная с нулевого значения на шкале. Это один из приемов, при помощи которого мы можем приписать числовые формы объектам таким образом, что равные отношения между ними будут соответствовать равным отношениям тех или иных свойств объектов.

Создав шкалу отношений, мы получаем возможность преобразовывать ее числовые значения (например, переводить дюймы в футы) просто путем умножения каждого из них на некоторую постоянную. При этом всегда предполагается существование абсолютного нуля, хотя для некоторых шкал нулевое значение никогда не может быть получено (например, абсолютный нуль температуры). К шкалам отношений приложимы все виды статистических мер, в частности только при применении этих шкал можно смело производить все преобразования, связанные с использованием децибел, когда берется логарифм отношения двух величин силы звука.

Важнейшей из шкал отношений является собственно «числовая» шкала — шкала чисел в эмпирическом смысле этого слова. Этой шкалой мы пользуемся, когда сосчитываем такие предметы, как яйца, монеты или яблоки. Эта шкала численности совокупностей имеет настолько важное значение и стала столь общепринятой, что при рассмотрении проблем измерения о ней обычно даже не упоминают. Это упущение могло бы удивить нас, если бы, имея дело с понятием равенства, мы не убедились в том, что весьма часто как раз самые общеизвестные и очевидные вещи долгое время не привлекают к себе внимания! Для шкалы численности мы обычно допускаем только одно преобразование, заключающееся в умножении на единицу, то есть на единичный элемент группы подобия. Другими словами, мы обычно считаем единицами. Но совершенно очевидно, что мы с равным успехом можем считать по два, по три, по десять и т. д. Мы могли бы приписывать числовые формы совокупностям объектов в соответствии с таким правилом, которое привело бы нас к тому, что число пальцев на ноге человека мы определили бы как равное двум с половиной, — это было бы в том случае, если бы мы производили счет по четыре.

В физике принято различать шкалы отношений двух типов: *основные* и *производные*. Основные шкалы представлены такими величинами, как длина, вес и электрическое сопротивление (мы должны добавить сюда и численность), в то время как производные шкалы представлены такими величинами, как удельный вес, скорость и упругость.

Последние представляют собой *производные* величины в том смысле, что они суть математические функции определенных основных величин. Фактически производных величин в физике гораздо больше, чем основных, которые считаются основными потому, что позволяют, например, производить физическую операцию сложения, аналогичную математической операции сложения. Веса, длины и сопротивления могут складываться в физическом смысле, однако в теории измерения этому действительно важному эмпирическому факту обычно придают большее значение, чем он заслуживает. Так называемые основные шкалы являются важным частным случаем шкал отношений, но лишь частным случаем.

В самом деле, можно показать, что основные шкалы могут быть созданы даже тогда, когда невозможно выполнить физическую операцию сложения. В качестве примера рассмотрим шкалу для измерения веса, сделав при этом допущение, что мы живем в мире таких веществ, которые обладают свойством взрываться, как только мы соединим два небольших количества этого вещества в одной чашке весов (как теперь стало известно, такие вещества действительно существуют). Для создания шкалы нам потребуются: 1) весы обычного типа, используемые в лаборатории; 2) весы обычного типа (то есть такие, ось шарнира которых расположена в центре горизонтальных плеч), у которых, однако, одна чашка перевешивает другую, когда обе чашки пусты; и 3) весы обычного типа, отличающиеся, однако, тем, что ось шарнира находится не в центре плеч. Весов первого типа достаточно для определения равенства и порядка; на вторых весах можно определять равные разности, а на третьих — равные отношения. С помощью вторых весов мы можем измерить любое требуемое число выборок, которые отделены друг от друга равными интервалами. Обозначим эти выборки *a, b, c, d*... С помощью первых весов можно установить порядок этой последовательности от самого маленького ее элемента до самого большого. Наконец, с помощью третьих весов можно сделать выборки (*A, B, C, D*...), связанные какими-то равными, но неизвестными нам пропорциями. Тогда мы можем использовать первые весы для определения того, какие элементы одной последовательности равны элементам другой и каким именно элементам. Допустим, что

$$C=d, \quad D=j, \quad R=h, \quad S=p.$$

Тогда $\frac{C}{D}=\frac{R}{S}$, и мы можем подставить вместо букв C, D, R и S выражения, каждое из которых представляет собой сумму d и соответствующего числа интервалов между d, j, h и p. Тогда уравнение

$$\frac{C}{D}=\frac{R}{S}$$

примет вид

$$\frac{d}{d+6}=\frac{d+4}{d+12}.$$

Решив это уравнение, получим, что $d = 12$. Далее, поскольку интервалы между a, b, c, d и e равны между собой, отсюда следует, что $c = 11$, $b = 10$, $a = 9$, $e = 13$,... $h = 16$,... $j = 18$,... $p = 24$ и т. д. Эти величины образуют настоящую относительную шкалу, и те веса, к которым они относятся, могли бы служить «эталонами» веса для измерения других объектов.

При этой методике можно получить множество весов, свойства которых будут полностью изоморфны свойствам такого множества, которое определяется (как сказали бы физики) посредством основного измерения, построенного на процессе уравнивания весов и их «сложении».

Это максимально краткое описание возможной методики определения веса приводится здесь просто для того, чтобы показать, что *физическое* сложение не является необходимой основой измерения. Мы производим имеющие законную силу измерения и при таких условиях, при которых процесс физического сложения объектов — путем совмещения их границ (laying end to end) или путем образования из них общей массы — совершенно невозможен.

* * *

Итак, мы приходим к заключению, что наиболее свободное и полезное определение измерения состоит в следующем: измерение есть приписывание объектам числовых форм таким образом, чтобы последние репрезентировали факты, а также произвольно принятые условия относительно них. Проблема установления того, чем является и чем не является измерение, тем самым сводится просто к вопросу о том, каковы те правила — если они существуют, — согласно которым числовые формы приписываются объектам.

Если мы можем указать непротиворечивую систему правил, то мы, очевидно, имеем дело с некоторого рода измерением и можем тогда перейти к выяснению более интересного вопроса, а именно какого же рода это измерение? В большинстве случаев характер и вид измерения, а следовательно, и тип соответствующей шкалы выясняются в результате формулирования определенных правил приписывания числовых форм объектам. Если же при этом еще остается какая-то двусмысленность, то мы можем искать окончательный и определенный ответ на наш вопрос в математической групповой структуре данной формы шкалы. Другими словами, нам следует установить, каким способом мы можем преобразовывать числовые значения на шкале, оставляя неизменными выполняемые ею функции. Мы знаем, что если численные значения на всех шкалах умножить на постоянную величину, то изменится только величина единицы шкалы (за исключением тех случаев, когда постоянный множитель сам представляет собой единицу). Если, кроме того, к этой постоянной может быть — без изменения функций шкалы — прибавлено некоторое число (или может быть выбрана новая нулевая точка), то здесь мы находим положительное свидетельство того, что имеем дело не со шкалой отношений. Далее, если шкала может продолжать служить по своему назначению и при том условии, что ее численные значения возводятся в квадрат или в куб, то это наверняка также и не интервальная шкала. И, наконец, если любые два численных значения на шкале могут быть произвольно подставлены одно вместо другого, то исключается даже шкала порядка, и единственно возможной остается шкала наименований.

Предлагая свое решение проблемы классификации шкал, мы отнюдь не утверждаем, что все шкалы, принадлежащие к одной и той же математической группе, являются одинаково точными, или полезными, или в равной степени «фундаментальными» или что в любых практических условиях всегда можно решить, к какой именно категории относится данная шкала. Измерение не может быть более точным и совершенным, чем те эмпирические операции, при помощи которых оно производится; сами же эти операции по своей точности и совершенству варьируют в широких пределах. Против использования любой специальной шкалы, применяемой при измерении в психологии или физике, можно возражать на различных основаниях: ввиду наличия смещения, недостаточной точности, ограниченности области применения шкалы данного типа и других отрицательных факторов. Однако тому, кто выдвигает подобные возражения, следует помнить, что все эти факторы относительны и зависят от практических обстоятельств и что ни одна из шкал, используемых смертными, не является совершенно свободной от недостатков.

ПСИХОФИЗИКА

Шкалы для измерения находят применение во всех областях психологии, но лишь в немногих из них к измерениям прибегают так же систематически, как в психофизике. Основные проблемы психофизики могут быть сформулированы в самом общем виде, подобно перечню эмпирических операций во второй колонке табл. 6. Последнее обстоятельство является следствием того, что психофизика, так по крайней мере понимал эту науку ее создатель [Фехнер], есть точная наука о функциональных отношениях между «телом и душой». Отметим также, что Фехнер попытался убедить читателей в правильности философии панпсихизма, согласно которой различение между духом и материей должно быть изгнано из психологии; в своей работе «Элементы психофизики», опубликованной в 1860 году, он ограничивает себя недальновидной концепцией, будто ощущения могут быть измерены только «косвенным» путем (ср. Боринг, 1942). Все это не помешало тому, что психофизика в ее основных чертах была создана творческим умом, который понимал не только значение эксперимента, но и сущность измерения.

Подобно математике, психофизика имеет интересную историю. Будучи значительно моложе «королевы наук», психофизика тем не менее уже выросла и развилась в достаточной степени, чтобы внести в изучение человеческой природы солидный вклад, представив веские доказательства, касающиеся ее инвариантных свойств. Подобно своему коллеге — мистику Пифагору, Фехнер совершил в науке важный шаг вперед, хотя стремился дать доказательство положениям теологии. Отсюда концепция, согласно которой ощущения имеют единицы измерения и величину, была встречена бурно выражаемым неодобрением. Однако на этот раз недовольство оказалось, во всяком случае, не сильнее и, пожалуй, несколько слабее того охватившего многих рядовых людей волнения, которое вызывали известия об открытии сначала несоизмеримых чисел, затем чисел меньших, чем ничто, и, наконец, чисел, представляющих собой корни квадратные из чисел меньших, чем ничто. Бесплодные, утонченные дискуссии по поводу десятистепенных вопросов метода и интерпретации в психофизике весьма похожи на «пустые словопрения» (выражение Белла), которые разбушевались при обсуждении таких вопросов, как существование точек и линий и их роль в геометрии.

И в психофизике и в математике научная деятельность периодически оживляется столкновениями двух противоположных друг другу «темпераментов», склонных один к анализу, другой к синтезу, один к строгости, другой к «вольности», один к логичности, другой к образности, один к формализму, другой к интуиционизму, — называйте их как угодно: названий можно подобрать десятки. Первые признают только строгость и питают презрение к тому, что Уильям Джемс называл «объектами, дающими пищу скорее нашему воображению». Вторых раздражают требования точности, и они ищут путь, который быстрее привел бы их к сердцу вещей. Пуанкаре, лучший психолог среди великих математиков, утверждает (Пуанкаре, 1913, стр. 210 и далее), что каждый век порождает в математике оба этих типа умственных наклонностей. И кажущуюся победу одерживают то одни из них, то другие. В психологии происходят такие же периодические изменения, напоминающие колебательные движения маятника.

Возможно, именно этим объясняется многое в тех крутых поворотах, которые так характерны для развития психофизики за последние девяносто лет. Интуитивист Джемс имел все основания оценить проникнутые взаимными нападками и пререканиями работы педантичных специалистов в области метода психологии как «ужасную литературу», при этом ни в малейшей степени не обескураживая исследователей, создающих новые методы, предлагающих новые приемы и открывающих новые области их применения. Но, как это всегда бывает в науке, когда бурные столкновения сменяются затишьем, резкие эпитеты забываются, и от периода жестоких споров остается важное наследство полезных «орудий», которые могут быть использованы новым поколением строителей здания науки. Содержание многих работ, вошедших в данную книгу в качестве ее разделов, дает богатый материал, свидетельствующий о том, что «орудия» психофизики находят себе широкое применение. И к середине XX столетия психофизика, подобно математике, становится тесно связанной с рядом прикладных отраслей науки, проникает в промышленность и управление.

Мы рассматриваем здесь психофизику в самом широком плане — как науку об ответах организмов на служащие стимулами формообразования. Существуют и другие точки зрения, сторонники который понимают психофизику более узко; и при этом наиболее широко принятой, традиционной является весьма ограниченная концепция [1]. Беда этой концепции состоит в том, что она ошибочно сводит проблемы психофизики к разработке методики экспериментирования, а ее цели — к достижению точности измерения. Для такого взгляда название «психофизика» становится синонимом некоторых немногочисленных методов определения порогов чувствительности, а рассмотрение более содержательных вопросов уступает место поискам пределов, до которых могут доходить ошибки при выборке. Эта узкая концепция быстро сдает свои позиции и уходит со сцены по мере того, как расширяется сфера применения психофизики, которая начинает заниматься столь различными проблемами, как техника телефонной связи и определение пригодности к той или иной профессии.

[1] Пример узкого определения психофизики можно найти в отчете Калориметрического комитета Американского оптического общества (см. отчет за 1943—1944 годы), где психофизическое исследование сводится к использованию субъекта-наблюдателя в качестве безразличного инструмента при определенных, очень специфических условиях. См. также критику Г. Хелсоном ограниченности этого определения («Psychological Bulletin», 1949, **46**, p. 167—168).

Нет необходимости подвергать здесь эту концепцию более подробной критике. Целесообразнее будет посвятить дальнейшее изложение рассмотрению того, к каким результатам обычно приходит психофизика в области измерения и количественной оценки. Фактологическое описание текущих исследований могло бы быть одним из путей осуществления нашей задачи, однако мы предпочитаем охарактеризовать ее основные проблемы и методы.

Мы можем ограничить наше рассмотрение примерами из области ощущений. При этом наш выбор определяется не теми соображениями, что психология ощущений имеет дело с тем же предметом изучения, что и психофизика ощущений, а просто тем, что здесь мы находим весьма удобный фон, на котором более отчетливо вырисовываются «контуры» интересующей нас проблемы. Когда нам удается получить определенные обобщения для какой-то одной области, тогда уже значительно проще распространить их также и на другие. Например, Мозье (см. М о з ь е, 1940; его же, 1941) разрабатывает такой перспективный вопрос, как отыскание способа формулирования теорем психофизики на языке психометрики (занимающейся тестами умственной одаренности) при помощи соответствующего переноса постулатов и определений. Это оказывается возможным потому, что обе дисциплины изучают ответы индивидов на служащие стимулами ситуации. Психофизика рассматривает ответ как индикатор того или иного признака индивида, признака, который изменяется вместе с изменением стимулов и остается относительно инвариантным при переходе от одного индивида к другим. Психометрика же видит в ответе индикатор признака, который варьирует от индивида к индивиду, но остается относительно инвариантным для различных стимулов. Задачи психофизики и психометрики и состоят в выявлении условий и границ этих инвариантов.

Здесь имеет место своего рода бинарное отношение, а именно отношение между *ответами* (ощущениями, восприятиями, установками, суждениями, избирательными действиями и т. п.) и *организмами* (людьми или животными). Мы можем, пользуясь данной шкалой, измерить тот или иной аспект ответа единичного организма или целого класса сходных организмов. При помощи той же самой шкалы мы можем измерять и признаки организмов. Возьмем простой пример: в лабораторных условиях устанавливается по определенной шкале порог для ответа, называемого слышимостью, для группы людей, обладающих «нормальным» слуховым аппаратом. В отиатрической клинике используются те же шкалы для измерения признаков людей — на этот раз с целью распределить их по категориям в зависимости от их слуха.

Проблемы психофизики

В известном смысле перед психофизикой стоит только одна проблема — определение стимула. В этом же смысле и перед всей психологией стоит только одна, и именно та же самая проблема. Таким образом, определение стимула является более значительной проблемой, чем это может показаться с первого взгляда. Основание для такого сведения психологии к проблеме определения стимулов состоит в следующем: полное определение стимула данного ответа включает установление детальных особенностей всех преобразований среды — как внешней, так и внутренней, — при которых ответ остается инвариантным. Это установление специфических условий инвариантности, несомненно, должно приводить к полному пониманию факторов, которые вызывают те или иные ответы организма или же изменяют их характер. Конечно, не составляет большого труда избрать какое-либо из произвольных определений для «стимулирующих объектов» (то есть для данных видов линий, характеристик светового излучения или звуковых волн и т. п.), но ведь вопрос состоит в том, какие именно свойства этих объектов служат стимулами? Подходя с этой точки зрения, легко убедиться, что мы еще не имеем полного определения стимула ни для одного из ответов. В лучшем случае нам удастся лишь частично определить условия и границы инвариантности.

Возьмем, например, область слуха, относительно которой у нас, как нам обычно кажется, имеются обширные сведения. При каких преобразованиях ощущение данной высоты звука инвариантно? Можем ли мы изменять частоту звуковых колебаний? Да, можем — в известных пределах, если при этом производится соответствующее изменение силы звука. Можем ли мы менять фазу звуковых колебаний? Да, но также лишь в некоторых пределах, причем мы еще не знаем точно, в каких именно пределах. А что мы можем сказать относительно формы звуковых волн, спектра распределения энергии по частотам, длительности сигнала, влияния предшествовавших стимулов и т. п.? В действительности относительно стимуляции высотой звука мы знаем лишь очень немногое.

Рассмотрим далее ощущение определенного запаха. Можно с уверенностью сказать, что мы едва ли можем даже назвать те свойства газов, которые определяют инвариантность запаха. Согласно одной теории, единственным преобразованием, которое меняет запах, является изменение поглощения инфракрасного излучения парами, но этот факт отнюдь не является твердо установленным.

Когда же дело доходит до таких сложных ответов, какими являются галлюцинации, установки, избирательные действия и т. п., наше незнание причин этих явлений становится еще более очевидным. Стремление познать условия и пределы инвариантности этих явлений пока еще весьма далеко от своего осуществления.

Приведенных примеров, по-видимому, достаточно, для того чтобы показать, насколько сведение этих проблем психофизики к поискам определения стимулов не является неразумным, но вместе с тем эти примеры свидетельствуют о практической бесполезности всеобъемлющих определений. Чтобы действовать в соответствии с требованиями науки, необходимо подразделить ее проблемы на удобные для специального анализа разделы. Мы не можем разрешить сразу все загадки мироздания.

Один из способов классификации проблем психофизики приводит к выделению семи таких разделов (см. Стивенс, 1948), которые могут быть перечислены в следующем порядке:

1. *Абсолютные пороги.* Каковы величины раздражителей, при которых происходит переход от отсутствия ответа со стороны организма к его осуществлению и обратно?

2. *Разностные пороги.* Какова «разрешающая способность» организма, иначе говоря, каково минимальное обнаруживаемое организмом изменение стимула?

3. *Равенство.* Каковы величины двух различных стимулов, если они вызывают одинаковые ответы (например, ответы, которые оказываются равной величины при измерении по шкале для некоторого признака)?

4. *Порядок.* Какие различные стимулы вызывают ряд таких отве-

тов или впечатлений (в психологическом смысле), которые можно расположить по их величине в последовательном порядке?

5. *Равенство интервалов.* Какие стимулы вызывают ряд ответов, по своей величине образующих последовательность и отстоящих друг от друга на равные интервалы по шкале для измерения некоторого признака?

6. *Равенство отношений.* Какие стимулы вызывают ряд таких ответов, для которых отношение величины последующего к величине предыдущего по шкале для измерения некоторого признака остается постоянным?

7. *Оценка стимулов.* С какой степенью правильности (обоснованности) и точности (надежности) может какой-либо человек оценить «физическую» величину стимула?

Необходимы некоторые дополнительные пояснения относительно указанных семи проблем психофизики. Хотя эти пояснения должны быть краткими, мы все же постараемся выделить некоторые более интересные стороны психофизических проблем, главным образом относящиеся к области ощущений. Мы имеем в виду эмпирические проблемы. В то же время именно над ними больше всего работают психофизики. По отношению к тем вопросам, которые рассматривались в первых главах данного раздела, эти эмпирические проблемы являются практическими. Но по отношению к собственно практической человеческой деятельности они выступают как теоретические проблемы. Все это свидетельствует об относительности самого понятия практического.

Абсолютные пороги

Понятие абсолютного порога хорошо известно психологам. Они убеждены в том, что порог — явление всеобщее для живых организмов и что для каждой их реакции существует некоторая предельная величина стимула, по ту сторону которой ничего не происходит. Порог — это такая величина стимула, которая делит весь континуум[1] стимулов на два класса: первый включает те стимулы, на которые организм реагирует, второй — те стимулы, на которые организм не реагирует. Таким образом, порог можно рассматривать как своего рода «сечение» континуума раздражителей. Это определение напоминает предложенное Дедекиндом определение иррационального числа как своего рода «сечения» в области рациональных чисел, делящее эту область на два класса, в которых в левом — нет наибольшего элемента, а в правом — наименьшего (см. Юнг, 1911, стр. 104).

Одной из практических проблем психофизики является определение свойств и пределов тех двух классов стимулов, на которые порог делит все энергетические формообразования окружающей среды. Решая эту проблему, психофизик сознательно обращается к понятию инвариант-

[1] В применении к стимулам слово «континуум» относится к свойству различных измерений (dimensions), в рамках которых можно производить упорядочение стимулов. В этих измерениях обычно можно выделить градации, которые в некоторой, незначительной степени соответствуют способности организма к различению. В этом смысле измерения стимулов непрерывны. Однако при определенных специфических условиях прерывный (квантовый) характер физических событий может все же сказываться, как, например, в том случае, когда зрительный порог устанавливается в зависимости от поглощения сетчаткой половинной порции светового кванта. В отличие от математического континуума физический «континуум» не обладает свойством бесконечной делимости. Тем не менее математический континуум, хотя он и не является совершенно изоморфным физическому континууму, служит для него полезной моделью.

ности. Так, для каждого данного свойства ощущения он стремится узнать, какая комбинация величин стимулов (например, частоты и интенсивности) дает пороговое сечение. Вообще же сечение инвариантно при одновременном преобразовании нескольких измерений стимула. Такое изображение порога, как, например, «аудиограмма», является обычным приемом для описания того или иного аспекта этой инвариантности.

При анализе порогов в психофизике обычно особенно подчеркивают их изменчивость. Как правило, порог не является инвариантным во времени. Скорее о нем можно сказать, что в тех или иных пределах он непрерывно изменяется, и поэтому мы вынуждены как бы схватывать его «на лету». Мы проделываем это при помощи таких приемов, которые в какой-то степени напоминают действия математиков, когда они устанавливают значение иррационального числа, сужая пробел между двумя рациональными числами, одно из которых больше, а другое меньше искомого иррационального числа. Мы устанавливаем величину порога стимула с помощью статистических приемов интерполяции в промежутке между стимулами, которые определенно меньше пороговых, и стимулами, которые определенно больше пороговых. То, что фиксируется как порог, есть, таким образом, произвольная точка внутри области вариативности.

Эта вариативность есть функция времени. И поскольку мы должны делать выборки в разные моменты времени, то получаем для порога лишь весьма нечеткое выражение: как если бы континуум величин стимулов «разрезали» деревянной ложкой. Тем не менее есть основания полагать, что в каждый данный момент действительное положение порога в континууме стимулов является фиксированным, определенным и что с помощью адекватных методик удастся обнаружить точную локализацию порогового «сечения». Для абсолютных порогов соответствующие методы не выработаны, но в отношении разностных порогов перспективы более обнадеживающие.

Разностные пороги

Рассматриваемая в этом разделе проблема заключается в нахождении на континууме *приращений стимулов* такой точки, которая делит все приращения на два класса: в первый включаются те, на которые организм реагирует, а во второй — те, на которые организм не реагирует. Таким образом, разностный порог, подобно абсолютному порогу, представляет собой сечение, делящее физический континуум. И здесь положение этого сечения также оказывается нечетким из-за его изменения во времени, так что по необходимости приходится прибегать к методике выборки и к интерполяции. Традиционные «психофизические методы» как раз и являются такими методиками.

Различение (discrimination) как характеристика ощущений организма зависит от нервных процессов, подчиняющихся закону «все-или-ничего». Этот факт свидетельствует о том, что даже едва заметные различия между двумя стимулами должны в каждом данном случае иметь конечную величину и заключаться внутри определенных границ, поскольку этим характеризуется, согласно нашему допущению, также и величина абсолютного порога. Это предположение обнаружило свою плодотворность, когда Бекеши показал, как стимулирование ответов и их выборку можно произвести таким образом, что выявляется «квантовый» характер способности различения. Методика Бекеши была видоизменена Стивенсом и Фолькманом (см. Стивенс и Фолькман, 1940а) таким образом, чтобы избежать «ошибки времени» и более прямым способом выявить величину «нервного кванта». Понятие «нервного кванта» имеет и другие теоретические аспекты, однако здесь оно представляет для нас интерес лишь постольку, поскольку оно является поучительным примером, помогающим раскрыть роль математических моделей и характер их использования. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Существуют две основные модели, применимые к выборкам во времени среди величин сенсорного различения в тех случаях, когда испытуемый старается обнаружить некоторое приращение величины стимула (ср. Стивенс, Морган и Фолькман, 1941). Назовем их соответственно «нормальной» и «прямоугольной» моделями, следуя названиям тех типов распределения, по которым, согласно допущениям, располагаются данные. К «нормальной» модели прибегают в том случае, когда, по предположению, ответ организма на приращение стимула зависит от суммарного действия множества незначительных факторов, которые образуют неупорядоченные комбинации и, в зависимости от случайных обстоятельств, могут как усиливать, так и ослаблять способность различения. В этой модели используется непрерывная математическая функция («нормальная кривая»), интеграл которой (фи-функция от гамма-функции) мы подбираем для графического изображения данных (число ответов соответственно величине приращения). Это графическое представление называется *психометрической функцией.*

«Прямоугольная» модель используется в том случае, когда, по предположению, способность различения имеет прерывный характер и изменяется конечными квантовыми скачками. Интегралом прямоугольного распределения является линейная функция в интервале между двумя конечными пределами; этот интеграл мы подбираем к данным так же, как и в предыдущем случае.

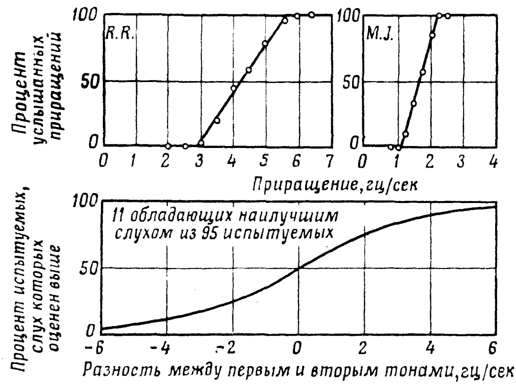
Теперь рассмотрим вопрос о том, какая из двух моделей пригодна для данных о разностном пороге. Его решение заключается в том, что, если допустить соответствующие пределы погрешности, можно применять как ту, так и другую модель. Какая именно из них будет больше подходить для *данной* области психометрики, — это зависит от методики эксперимента, а именно от метода, применяемого при выборке ответов во времени (фиг. 2). Некоторые формы психометрических функций могут быть получены заранее с помощью различных методик (ср. Миллер и Гарнер, 1944).

Однако весьма часто мы не в состоянии сделать выбор между двумя математическими моделями, исходя только из их пригодности для наших данных. В связи с этим уместно привести знаменитое высказывание Пуанкаре: «Если явление допускает полное механическое объяснение, то оно допускает также и бесконечное множество других объяснений, которые будут с одинаковым успехом объяснять все подробности, обнаруженные экспериментальным путем» (Пуанкаре, 1913, стр. 181). В данном случае мы имеем дело не с «механическим явлением» и не с уравнениями, о которых говорит Пуанкаре. Однако психолог не должен упускать из виду того факта, что всегда существует возможность двух взаимно исключающих объяснений, двух альтернативных моделей.

При выборе подходящей модели исследователи предпочитают исходить из критериев простоты и убедительности. Применительно к проблеме сенсорного различения авторы, исходя из этих критериев, обычно отдают предпочтение, по-видимому, прямоугольной модели, то есть «квантовой» теории, потому что, во-первых, она указывает также и параметр, отличный от простой формы функции, а именно наклон психометрической линии, и, во-вторых, фи-функция от гамма-функции выступает в качестве частного случая квантовой гипотезы, поскольку фи-функция от гамма-функции получается обычно при такой методике эксперимента, при которой между предъявлением стандартного и сравниваемого стимулов оставляется некоторый промежуток времени, с тем чтобы чувствительность организма могла измениться.

Рассмотрим еще один вопрос, касающийся разностных порогов.

Отношение едва заметного различия к величине исходного стимула выступает в психологии как закон относительности: величина, которую



Фиг. 2. Психометрические функции, полученные при помощи двух различных методик.

На двух верхних графиках (для двух испытуемых) показаны ломано-линейные функции, полученные при „квантовой" методике. Каждая точка основана на 100 оценках весьма малых приращений, прибавляемых каждые 3 *сек* к тону 1000 *гц*. Величина кванта для *R. R.* равна 2,8 *гц/сек*. Для *M. J.* она составляет 1,1 *гц/сек*. Заметим, что наклон линии изменяется вместе с величиной кванта и достигает 100% при величине в 2 кванта (см. Стивенс, Морган, Фолькман, 1941).

Нижний график, выполненный для показателей 11 испытуемых с наилучшим слухом из 95 подвергавшихся тестам Сишора по различению высоты тона. В этом тесте применяется метод постоянных стимулов, с коротким временным интервалом между эталонным и сравниваемым тонами. Если точка, соответствующая 75%, берется в качестве разностного порога, то его величина для 11 испытуемых составляет приблизительно 2 *гц/сек*. Линия, представляющая психометрическую функцию, для остальных из 95 испытуемых была даже еще менее крутой, чем здесь приведенная (ср. Стивенс, 1948).

необходимо прибавить к величине стимула, чтобы получить такое различие, относительна и зависит от величины уже имеющегося стимула. Вебер предложил закон, согласно которому отношение между стимулом и прибавляемым к нему приращением инвариантно по интенсивности, и он был весьма близок к истине. Теперь принято говорить, что он был неправ, но все же для зрения и слуха, то есть для тех областей, где необходимые измерения, по всей вероятности, наиболее достоверны, «Веберово отношение» является, по-видимому, постоянной для более чем 99,9 процента случаев в области стимулов обычной интенсивности. (При обычном графическом изображении [интеграла] этого отношения как *логарифма* от величины стимула обнаруживается незначительная область, в которой нет постоянства этого отношения.) Первые психофизики — Фехнер, Гельмгольц и другие — знали о подобного рода небольшой области, характеризующейся непостоянством этого отношения, и для спасения закона Вебера предложили уточнение (недавно вновь выдвинутое Г. А. Миллером), а именно вместо формулы $\Delta I = kI$, по Веберу, эти авторы стали писать:

$$\Delta I = k(I + I_r),$$

где ΔI — приращение интенсивности стимула, соответствующее едва заметному различию, I — интенсивность стимула, I_r — небольшое прибавление к величине I, k — постоянная. Миллер считает, что это уравнение подходит для данных, которые касаются интенсивности едва заметных различий, измеряемых «белым шумом», когда методика эксперимента такова, что квант сенсорного различения может характеризовать значительную широту интенсивностей. Это модифицированное уравнение сводится к закону Вебера при высоких интенсивностях, потому что тогда величиной I_r можно пренебречь, а для низких интенсивностей разумно предположить, что не всякая действенная стимуляция вызывается только тем «стимулом», который измеряется экспериментатором. Некоторая ее часть является, по-видимому, как бы остаточным фоном и выражается в уравнении дополнительным членом I_r.

Если теперь сделать еще один шаг и написать модифицированное уравнение в такой форме:

$$\frac{\Delta I}{I + I_r} = k,$$

то нетрудно убедиться, что при прибавлении I_r к измеряемой интенсивности I инвариантность отношения приращения к раздражителю восстанавливается. Такое понимание закона Вебера, если его удастся отстоять в ходе дискуссий, представит значительный интерес для психофизики, особенно потому, что она касается важнейшей инвариантности в сенсорном различении. Значение этих немногочисленных основных инвариантностей должно быть оценено по достоинству, и они требуют серьезного подхода.

Общеизвестно, что Фехнер использовал закон Вебера для того, чтобы вывести, как он полагал, меру величины ощущения. Способ его рассуждения мы затронем здесь лишь в связи с одним обстоятельством. Чтобы выдвинуть свое утверждение, Фехнер должен был не только допустить, что закон Вебера имеет силу, но также и *постулировать* субъективное равенство едва заметных различий. Это означает, что стимул, который по своей величине, скажем, на 20 едва заметных различий больше порогового, должен вызвать ощущение, в 2 раза более сильное, чем ощущение, вызванное стимулом, который больше порогового лишь на 10 едва заметных различий. Приведем здесь еще раз уже цитированные выше слова Рассела относительно постулирования: «Метод «постулирования» того, что мы хотим, имеет много преимуществ; эти последние — того же рода, что и преимущества вора перед честным тружеником» (Рассел, 1920, стр. 71). Разумные, честные труженики, работая в различных лабораториях, недавно установили, что ощущение громкости, вызванное звуковым стимулом, превышающим пороговый на 20 едва заметных различий, сильнее ощущения громкости, вызванного стимулом, превышающим пороговый на 10 едва заметных различий, не в 2 раза, а значительно больше (ср. Стивенс и Дэвис, 1938, стр. 148 и далее). Постулат Фехнера должен был быть отброшен, но это не отменяет того положения, что ощущения могут быть измерены. Теперь мы подходим к измерению ощущений более прямым путем, отказавшись от косвенного пути, предложенного Фехнером.

Выходит, таким образом, что едва заметные различия для громкости не равны по субъективной величине. Оказывается, что это справедливо и для других свойств, характеризующихся степенью интенсивности, таких, как субъективные тяжесть, яркость и вкус. Вместе с тем для высоты тона и, возможно, для насыщенности едва заметные различия субъективно равны, то есть для этих случаев постулат Фехнера, по-видимому, подтверждается. Тот факт, что существует два вида едва заметных различий — равные и неравные, подсказывает гипотезу (см. Стивенс, 1939b), согласно которой возможны два основных механизма различения, что и иллюстрируется механизмами, лежащими в основе нашего ощущения громкости и высоты тона. По всей вероятности, мы различаем возрастание громкости тогда, когда нервное возбуждение *прибавляется* к тому возбуждению, которое уже имелось (*аддитивный* механизм), в то время как увеличение высоты тона обнаруживается при изменении в распределении возбуждения, когда *вместо* старого возбуждения возникает новое (*субститутивный* механизм). Предлагаемое обобщение таково: для аддитивного механизма едва заметные различия субъективно не равны по величине; для субститутивного механизма они равны. В последнем случае мы, по-видимому, с полным правом можем последовательно «пронумеровать» едва заметные различия и использовать их в качестве шкалы интервалов для измерения того или иного свойства.

Конечно, как в том, так и в другом случае сосчитывание едва заметных различий дает в результате по крайней мере шкалу порядка.

Установление равенства

Проблема равенства (или, как ее называют, проблема *эквивалентов*) действительно является проблемой нахождения взаимоисключающих стимулирующих формообразований, для которых некоторое свойство ответа организма остается инвариантным. Эта проблема возникает во многих формах и во многих областях исследования. Ретроспективный обзор показал бы, что это одна из тех проблем, над решением которых обычно больше всего бились психологи. Простым примером из ранней психофизики может послужить установление Вебером того факта, что давление на лоб в 4 унции ощущается приблизительно так же, как давление на губы в 1 унцию [1 унция=28,3 *г* — *Ред.*]. В качестве уже не столь простого примера из более поздней психофизики приведем исследование Брунера и Постмана видимой величины объектов, имеющих различную «символическую ценность». По их наблюдениям, световой кружок с диаметром, превышающим один дюйм, охотнее сопоставляется испытуемыми с кружком с диаметром в один дюйм и со знаком доллара, чем с кружком того же диаметра, но с нейтральным рисунком. В этом эксперименте физический диаметр светового кружка представляет собой произвольное мерило для измерения эффекта восприятия различных символических ценностей.

Другими обычными примерами установления эквивалентов являются различные изофонометрические контуры: равная громкость, равная емкость (volume) звука и т. д.; а также изофотометрические контуры: равная яркость (кривая яркости света), одинаковый цветовой оттенок (явление Бецольда — Брюкке) и т. д. Все эти контуры характеризуются определенной комбинацией частоты и интенсивности, для которых изучаемое свойство является постоянным. Иногда пороговый контур может рассматриваться как частный случай эквивалентов; например, аудиограмму можно интерпретировать как «максимально высокий» контур, при котором громкость равна нулю.

Проблема равенства всегда сопутствует нашим изысканиям, поскольку именно в ней содержится как раз то, чего мы больше всего добиваемся, измеряя явления, для которых не существует ни интервальной, ни относительной шкалы. Автор этих строк в свое время вступил в эту таинственную область в связи с работой над довольно скромным вопросом — вопросом о смешении цветов (см. Стивенс, 1934). Комбинация красного и сине-зеленого цветов, смешиваемых для сопоставления с серым цветом, полученным в результате смешения черного и белого цветов, оказывается не соответствующей серому цвету, как только мы меняем размер предъявляемого полотна. С увеличением площади полотна и смесь представляется сине-зеленой, а с ее уменьшением — красной. Каковы должны быть изменения в размере полотна для различных изменений в насыщенности? Поскольку нет шкалы для измерения насыщенности, альтернатива состоит в изменении площади и затем в продолжении сопоставления после введения в черно-белую смесь сектора необходимого цвета. Размер сектора, с введением которого равенство восстанавливается, тем самым становится произвольной «мерой» изменения насыщенности, полученной путем изменения площади.

Подобных примеров можно было бы привести бесконечно много. Именно благодаря этой методике установления инвариантностей мы получаем возможность оценить изменения в ощущении, выразив их в терминах, описывающих стимулирующее формообразование, необходимое для того, чтобы вызвать эти изменения. При этом сам наблюдатель используется лишь в качестве *бесстрастного аппарата,* а это как раз тот путь, которым чаще всего следуют психологи при изучении так называемых «иллюзий». Иногда это является единственной практически возможной методикой, и нередко она приводит к важным и полезным результатам.

Установление порядка

Другой задачей, решением которой так или иначе заняты все психологи, является установление рангового порядка. Эта задача возникает перед нами, и притом в отчетливой форме, всякий раз, когда мы сталкиваемся с разнородными стимулами, не имеющими явных физических размерностей, которые упорядочивали бы их и ставили в монотонное отношение к изучаемому ответу. (Сказанное может показаться трудным для понимания, поэтому остановимся на этом вопросе подробнее.) Обычно мы прибегаем к упорядочению по рангам в том случае, когда некоторые психические свойства, связанные с данной группой стимулов, не являются однозначной функцией от некоторого измеряемого свойства стимула.

Поясним эту мысль примером.

Предположим, что стимулами являются образцы почерка, а качество ответа испытуемого выражается его суждением относительно того, насколько данный почерк ему нравится (приятен). Общепризнано, что почерк обладает многими физическими измерениями, причем каждое из них позволяет дать его «объективную» оценку; таковы высота букв, длина слов, толщина линий и т. п. Но чувство приятного не является монотонной функцией ни от одного из указанных физических измерений в том очевидном смысле, в каком мы говорили о высоте тона как о монотонной функции частоты. Следовательно, для установления шкалы порядка для чувства приятного мы должны прибегнуть к тому или иному из способов упорядочения: к попарному сравнению, установлению порядка качеств, использованию шкалы оценок и т. д.

Установив образцы рангового порядка, мы можем решить вопрос о том, возможно или невозможно подобрать определенную физическую меру или комбинацию мер, которые согласовывались бы с субъективным порядком. Если мы находим такую меру, то, по-видимому, делаем некоторые успехи в понимании важного ингредиента чувства приятного, возникающего при восприятии почерка. Если же мы не можем этого сделать, то у нас по крайней мере остается некоторая упорядоченная система примеров, на которой можно проверять различные гипотезы.

Интересно отметить, что во многих практических проблемах по упорядочению по рангам мы не можем достичь результата, который был бы полностью изоморфным формальной модели, подчиняющейся трем постулатам порядка, перечисленным в одном из предшествующих разделов данной статьи [«Математическая модель», см. стр. 38 настоящего издания. — *Ред.*]. Это происходит потому, что среди упорядочиваемых объектов два или больше часто связываются с одним и тем же рангом. Другими словами, изучаемое отношение (например, «приятнее, чем») не всегда является *связным* отношением в поле рассматриваемых выборок. В результате получается то, что математики обычно называют *частично упорядоченной* системой. Это понятие играет весьма важную роль в теории [кристаллических] решеток, или, что то же самое, теории структуры, построенной на отношении «включает» или «является частью от».

Всякий раз, когда мы пытаемся упорядочить стимулы, свойства которых имеют много измерений (многомерны), а это бывает довольно часто, мы сталкиваемся с интересными проблемами самого различного характера. Если, например, дана большая выборка для запахов, то проблема их упорядочения может привести нас к связанной с нею проблеме нахождения таких измерений или свойств, по которым могут изменяться обонятельные ощущения. В общем число этих свойств совпадает с числом последовательных порядков, по которым исследователь может расположить стимулы. Как правило, он получает эти различные порядки, подбирая для каждой новой задачи по упорядочению другое «множество» (или другое отношение), и при подобном аналитическом подходе различные свойства ощущений распределяются по таким категориям, как цвет, яркость и насыщенность для зрения, высота тона, громкость, емкость и плотность звуковой энергии для звуков и т. д. Для запахов широкое применение в торговле имеет набор из четырех шкал, каждая из которых относится к отдельному качеству. С их помощью опытные дегустаторы могут оценивать запахи, приписывая им некоторые значения по каждой из шкал в отдельности (ср. Крокер и Гендерсон, 1927; см. также Биб-Сентер, 1949). С аналогичной проблемой столкнулся Шелдон, изучая начальные фазы развития соматотипа. По каждому из трех самых очевидных «компонентов» физических данных человека специалисты распределяли фотографии 4000 индивидуумов по трем отдельным ранговым порядкам, по одной для каждого визуально различимого компонента: эндоморфии, мезоморфии и эктоморфии (ср. Шелдон, Стивенс и Такер, 1940).

Испытуемые, конечно, не всегда могут проанализировать отдельное субъективное измерение, например, тогда, когда им предлагается дать оценку *серьезности* криминального проступка. Это означает, что различные испытуемые устанавливают в этих случаях несовместимые друг с другом ранговые порядки, которые невозможно нанести на одну и ту же шкалу порядка, не прибегая к использованию более чем одного измерения. Если такого рода суждения выносятся на основе многомерных критериев, то иногда оказывается возможным, применяя метод попарных сравнений, найти число измерений, используемых испытуемыми, и нанести эти измерения на шкалу в соответствующем числе «пространств» (ср. Галликсен, 1946).

Как правило, психофизики не видят необходимости производить ранговое упорядочение стимулов, обладающих удобными физическими измерениями, когда одно из этих измерений представляет собой явно монотонную функцию излучаемого свойства. Психофизики избегают делать это, поскольку ранговый порядок очевиден, и они принимают его как нечто само собой разумеющееся. Так, они не беспокоятся относительно рангового упорядочения серии световых стимулов в значениях субъективной яркости, потому что ранговый порядок очевиден, а их внимание привлекают к себе задачи, решение которых обещает более плодотворные результаты. Однако это пренебрежение тем, что, очевидно, таит в себе известную опасность, и величины некоторых отношений, по нашему допущению монотонные, в действительности (это обнаруживается при более тщательном исследовании) могут иметь максимум, после «достижения» которого они как бы «возвращаются по своим собственным следам». Такая возможность требует от нас по меньшей мере настороженности. Во всяком случае, совершенно ясно, что если не удастся определить ранговый порядок в наносимом на шкалу эмпирическом материале, то невозможно применить никакую другую шкалу, кроме шкалы наименований.

Рассмотрим еще один вопрос. Тот факт, что, когда стимулы не имеют общего измерения, которое представляет собой монотонную функцию ответов организма на эти стимулы, мы чаще всего прибегаем к ранговому упорядочению, отнюдь не означает, что наши возможности только этим и ограничены. Помимо рангового упорядочения, мы можем выбирать среди стимулов такие, которые отделены друг от друга интервалами, воспринимаемыми испытуемым как равные, или даже такие, которые находятся в воспринимаемых, как раньше, отношениях, если это окажется практически возможным. Никакая логика не запрещает этого.

Однако в подобных случаях психологи обычно устанавливают лишь ранговый порядок и на этом останавливаются. Между тем они имеют все возможности пойти дальше. Как указывает Риз, «операции по измерению в психологии не являются необходимо зависимыми от предшествующих измерений какой-либо другой величины». Единственное, что требуется, это наличие некоторых средств для *идентифицирования* тех объектов, ситуаций или событий, которые мы пытаемся нанести на шкалу. Если имеются физические шкалы, это обычно дает наиболее удобные средства, служащие для идентифицирования стимулов, но и любое другое идентифицирование может также послужить для наших целей.

Наличие физической шкалы позволяет определить функциональное отношение между этой физической шкалой и субъективной шкалой. Это отношение в высшей степени интересно. Однако у нас есть по меньшей мере теоретическая возможность разработать совместно с Национальным бюро стандартов соответствующие образцы почерков, с помощью которых определение известных значений по шкале отношений для чувства приятного производилось бы без измерения почерка по какой-либо физической шкале.

Равные интервалы

Следующим после рангового упорядочения шагом является уравнение разностей. Определение равных интервалов становится в психофизике проблемой как в тех случаях, когда мы стремимся осуществить измерение, при котором среднее выступает в качестве значимой меры, так и тогда, когда вопрос сводится к установлению единиц в обычном смысле этого термина.

Эта проблема впервые получила свое признание в психологии тогда, когда Плато раздал группе художников куски черной и белой бумаги и попросил каждого из них подобрать такой серый цвет, который казался им находящимся посредине между черным и белым (ср. Боринг, 1942, стр. 42). Метод определения двух равных чувственных отстояний (sense distance), как их называет Титченер, путем деления пополам, по всей вероятности, характеризует самый простой подход к вопросу о равенстве интервалов. Операция «деления пополам», как мы уже отмечали при рассмотрении особенностей счисления, имеющего в качестве основания число восемь [см. «Математическая модель», стр. 27 настоящего издания. — *Ред.*], является, по-видимому, самой простой психологической операцией. Симультанное (одновременное) подбирание нескольких стимулов с целью получить равные интервалы, число которых превышает два, также возможное, но более трудное дело. Стивенс и Фолькман использовали пять стимулов для установления четырех равных интервалов для высоты тона (см. Стивенс и Фолькман, 1940b). Этот эксперимент, как оказалось, подтвердил результаты, полученные Мюнстербергом, который уравнивал по высоте тона два звуковых интервала, не являющихся смежными, то есть не имеющих общей точки.

Этих примеров достаточно для иллюстрации того, что уравнение чувственных отстояний давно используется в психофизике[1]. Можно было бы указать и на другие случаи, однако следует отметить, что описанная здесь методика еще недостаточно полно используется психологами, несмотря на то, что она имеет важное значение для установления равных единиц на сенсорных шкалах. И действительно, решения проблемы равенства интервалов самого по себе недостаточно для определения нулевой точки психологической шкалы, но, согласно строгой логике вещей, уравнение разностей является необходимой предпосылкой для создания не только шкалы интервалов, но также и шкалы отношений. К этому вопросу мы вернемся ниже.

Здесь же интересно отметить, что проблема уравнения интервалов играет бóльшую роль в работе специалистов по тестам умственной одаренности и других психометриков, чем в исследованиях психологов, изучающих сенсорную деятельность. В психометрике необходимость установления равных единиц ощущается необычайно остро, поскольку понятия, имеющиеся в распоряжении метрической статистики (средние, стандартные отклонения, коэффициенты корреляций и т. п.) являются

[1] Метеорологи и другие исследователи, изучающие климат, провели немало экспериментов над такими явлениями, как субъективная температура, влажность и общие условия, позволяющие считать тот или иной климат «хорошим». За основание этих шкал они принимали интервалы, воспринимаемые как равные, а также и другие психофизические меры. Как указывал в 1909 году Титченер, в этой области — благодатная почва для развития прикладных отраслей психофизики.

для психометрики, по-видимому, необходимыми орудиями исследования. При оценке человеческих способностей специалисты-исследователи, как правило, сталкиваются с различными статистическими проблемами, к которым методы статистики оказываются применимыми лишь тогда, когда уравнены соответствующие единицы. Выйти из подобных затруднений эти специалисты пытаются с помощью веры в «нормальное распределение» ошибок природы. Если такая вера имеет твердые основания, то есть если действительно правомерно использование этого распределения данных в качестве критерия для величин единиц, то уравнивание единиц оказывается возможным. Не будет ошибкой полагать, что такая вера часто оправдывается; однако следует обратить внимание на трудность распознания тех случаев, когда для нее нет никаких оснований.

Равные отношения

Проблема установления равных отношений существует в психофизике давно, и ее история не была безмятежной. Еще в 1888 году Меркель предпринял попытку упорядочить ощущения света по их интенсивности таким образом, чтобы они находились друг к другу в отношении одного к двум. Но, по-видимому, он так и не создал пригодной для работы шкалы, которая могла бы иметь raison d'être для уравниваемых отношений. И только в 30-х годах была наконец разработана во всех подробностях первая шкала для чувственного качества, а именно громкости. С тех пор число различных относительных шкал для субъективных величин стало расти с поразительной быстротой. Были созданы шкалы для следующих величин:

громкости (несколько работ; ср. Боринг, стр. 44);

высоты тона (Стивенс и Фолькман, 1940b);

зрительно воспринимаемой множественности (Тейвз, 1941);

тепла (Херджет, Гранат и Харди, 1941);

темпа зрительного восприятия мелькающих объектов, субъективных трудностей запоминания однозначных чисел, субъективной трудности восприятия слов в словарных текстах (все три исследования проведены Ризом; см. Риз, 1943);

боли (Харди, Вольфи и Гуделл, 1948);

ощущений сладкого, кислого, соленого и горького (все четыре исследования проведены Д. Р. Льюисом; см. Льюис, 1948);

субъективного веса (Харпер и Стивенс, 1948);

зрительно воспринимаемой яркости (Хейнс, 1949).

Из всех этих шкал только первые две, а именно шкалы для громкости и высоты тона, были подвергнуты своего рода перекрестной проверке в такой мере, в какой это, несомненно, может потребовать скептически настроенный исследователь. Шкала для высоты тона, единица которой называется *мел*, была установлена методом «парциальных» оценок, при помощи которых испытуемый регулирует какой-нибудь тон до тех пор, пока его высота не будет восприниматься им как половина высоты некоторого стандартного тона, а также путем оценок равно воспринимаемых чувственных отстояний, когда испытуемый уравнивает ряд смежных величин по высоте тона или же различий по высоте тона. Шкала высоты тона согласуется также с предсказанием, которое мы могли бы сделать, если бы допустили, что высота тона равномерно «распространена» по базальной мембране таким образом, что высота тона, делящая диапазон слышимости пополам, соответствует частоте, стимулирующей среднюю точку на базальной области.

Шкала громкости, основанная на «парциальных» оценках и имеющая в качестве единицы измерения *соны*, была испытана для равных чувственных отстояний только для очень ограниченной области, но в то же время было показано, что эта шкала согласуется с целым рядом других вполне разумных допущений. Во-первых, она подтверждает предсказание, согласно которому громкость данного звука, прослушиваемая двумя ушами, в точности вдвое больше громкости, прослушиваемой одним ухом. Во-вторых, она подтверждает то предположение, что суммарная громкость двух или более звуков одинаковой громкости равна сумме громкостей отдельных звуков, при том условии, что тоны не стимулируют перекрывающие друг друга области базальной мембраны (ср. Хоуэс). Возможно, что это наиболее важные контрольные данные, но есть и другие.

Любопытно отметить, что во всей этой работе по созданию относительной шкалы исследователи не сталкиваются с психофизической проблемой уравнивания отношений чувственных отстояний. Она ускользает благодаря приему, который на первый взгляд кажется удачной уловкой (пока не обнаруживается, насколько печальны те результаты, к которым она приводит). Вместо того чтобы подгонять друг к другу пары стимулов до тех пор, пока сопоставляемые стимулы в каждой паре не окажутся в некотором фиксированном (хотя и в неизвестном нам) отношении друг к другу, испытуемый уточняет величины стимулов таким образом, чтобы они встали в нами *предписанное* отношение — обычно в отношение двух к одному. Или же, наоборот, дается пара стимулов, а испытуемый оценивает численную величину воспринимаемого отношения между ними. (Точнее говоря, он оценивает численное отношение двух величин некоторого качества ощущения, вызываемого двумя стимулами, но для краткости мы говорим просто, что испытуемый оценивает воспринимаемое отношение стимулов.) Такова та методика, которой мы дали название «фракционирование».

Действуя в таком духе, мы опираемся на одно допущение, которое требует тщательной проверки. Мы постулируем, что испытуемый знает, каково заданное числовое отношение, и что он может дать обоснованную оценку числового отношения между двумя значениями величины некоторого психологического свойства. Если этот постулат оказывается «воровством» (о котором писал Рассел; см. стр. 38 и 69 настоящего издания), то это, во всяком случае, не «мелкая кража», поскольку в число награбленных драгоценностей входят все отношения, необходимые для того, чтобы непосредственно заняться конструированием шкалы отношений. Это «воровство» довольно крупного масштаба. Но если имеется ряд каких-то данных, которые стоят друг к другу — каждое к соседнему — в *известном* отношении, то существует вполне «честная» и законная методика, состоящая в приписывании определенной числовой формы какому-либо одному элементу данных, а затем в приписывании остальным элементам данных таких числовых форм, которые находятся в соответствующих отношениях к первой числовой форме. Если принятое допущение имеет основание, то в результате мы получаем шкалу отношений.

Действительно, существует убедительное подтверждение, свидетельствующее об эмпирической обоснованности и надежности оценки отношений, особенно отношения «двух к одному». Деление пополам, как мы уже дважды подчеркивали выше, является изумительно простой психологической операцией. Если нам необходимо построить структуру психологических операций, то именно оно должно играть роль твердого фундамента ее здания.

Риз высказывает справедливое мнение, что операция нахождения такого стимула, который воспринимался бы как равный половине стандартного стимула, является лишь частным случаем операции деления пополам такого интервала, одним из конечных пунктов которого является нулевая точка шкалы. Этот взгляд получает дополнительное подтверждение в открытии Стивенса и Фолькмана (Стивенс и Фолькман, 1940b), согласно которому действия испытуемого оказываются более правильными в том случае, когда величины предъявляемых ему стимулов близки к нулю. По-видимому, он может в этих условиях связать нижний конец интервала с более надежным «якорем», чем воображаемый нуль.

Нет необходимости, однако, говорить о том, что для проблемы разработки шкал не имеет большого значения то обстоятельство, делит ли испытуемый пополам интервал, заключающийся между некоторым значением и нулем или устанавливает два стимула с целью получить известное сенсорное отношение. Как в том, так и в другом случае эмпирический результат изоморфен тому, что мы могли бы назвать свойствами отношений данной числовой системы. Но при этом важно, по крайней мере с теоретической точки зрения, рассмотреть, что же произойдет в том случае, если мы откажемся от допущения, согласно которому испытуемый может интерпретировать данное численное соотношение, выразив его через отношения между ощущениями, или не примем во внимание того, что при двух данных ощущениях испытуемый может назвать численное соотношение между ними. Отрицая этот постулат, мы все же должны сохранить допущение, что испытуемый может судить относительно равенства и порядка (например, установить отношение «больше, чем»). Нам необходимо также предположить, что испытуемый может установить равенство двух интервалов, или чувственных отстояний, а также равенство двух сенсорных отношений. На основе этих постулатов мы могли бы тогда действовать точно так же, как и при решении проблемы, заключавшейся в том, чтобы создать шкалу для измерения веса, не прибегая к операции «сложения» (см. стр. 59—60 настоящего издания). Это конструирование шкалы для веса является адекватным образцом для построения шкалы отношений в тех случаях, когда эмпирические операции ограничены установлением равенства, рангового порядка, равных интервалов и равных отношений.

На этом примере можно отчетливо проследить всю логику измерения с помощью шкалы отношений. На практике обычно оказывается возможным в той или иной форме сократить путь применения этой методики, но если мы опускаем какие-либо ее этапы, то вынуждены опираться на допущения, которые должны быть предварительно «опробованы». Следовательно, было бы интересно, по крайней мере в качестве опыта по разработке метода, построить психологическую шкалу отношений, предлагая испытуемому уравнивать интервалы произвольной протяженности и уравнивать отношения произвольной величины. Такая методика должна подтвердить правильность шкалы, полученной путем фракционных суждений, хотя мы и берем на себя смелость предсказать, что ее результаты будут характеризоваться меньшей точностью (надежностью), чем результаты сокращенной методики «фракционирования».

Количественная оценка стимула

В этом мире всяческих практических приспособлений и ухищрений мы гораздо больше заинтересованы в правильной оценке физических мер вещей как в вопросе практическом, чем в изучении природы субъективных шкал. Так, автоинспектор стремится правильно определить объективную скорость проезжающего автомобиля, летчик — установить высоту самолета (в футах) над поверхностью земли, бакалейщик — оценить вес мешка фасоли, а портной — определить величину отреза материала, которая необходима на пальто для его клиента. Общая задача всех этих и огромного числа подобных им видов деятельности состоит в использовании субъективных впечатлений для предсказания результата, который мог бы быть получен путем объективного измерения. Воспринять фигуру человека и произвести ее измерение при помощи метра — это две весьма различные вещи. Многим из нас приходится устанавливать соответствие между подобного рода «субъективными» и «объективными» операциями и предсказывать вторые, исходя из первых. Тем или иным путем мы постоянно стремимся определить физическую величину или физическое отношение стимулов. Во всех этих случаях мы преднамеренно делаем именно то, чего сознательно стараемся избежать при изучении наших ощущений и восприятий, то есть мы совершаем то, что Титченер назвал «ошибкой в оценке стимула» («stimulus error»). По-видимому, исход многих наших повседневных дел в большей мере зависит от успешного совершения этой «ошибки», чем от возможности успешно ее избежать.

Особенно в условиях боевой обстановки, когда кругом свистят пули и воют снаряды и когда у человека нет времени для измерений, оценка величины стимулов приобретает чрезвычайно большое значение. Именно этим объясняется то большое внимание, которое уделяется систематической тренировке в умении определять величины стимулов по специальной программе и проверке искусности такого умения. В боевых условиях, когда точность оценки объективных отношений имеет жизненное значение, отдельные люди обнаруживают очень высокое мастерство в осуществлении, например, артиллерийской стрельбы «прямой наводкой» и т. п., причем оказывается, что оно обусловлено, как и следовало ожидать, не только природной способностью, но и научением.

Выделяя проблему количественной оценки стимулов как отдельную проблему психофизики, мы тем самым, по-видимому, приписываем ей такое достоинство, которое, вообще говоря, находится в противоречии с ее неопределенным характером. И действительно, она представляет собой довольно беспорядочное соединение различных самостоятельных проблем, которые, будучи взяты в отдельности, возможно, разрешимы ad hoc, но которые при этом, по-видимому, не связаны между собой какой-либо системой принципов. Надо полагать, будущие достижения существенно изменят это положение, но по крайней мере в настоящее время мы вынуждены ограничиться поисками отдельных фактов, поскольку они нам необходимы.

Можно даже попытаться показать, что проблема количественной оценки стимулов, за исключением тех ее аспектов, знание которых позволяет судить об индивидуальном умении определять величину стимула и путей его совершенствования, логически сводима к тем остальным шести проблемам психофизики, о которых мы говорили выше. Если, например, автоинспектор имеет наклонность систематически допускать ошибку в определении скорости машины по воскресеньям, то это дает нам некоторые сведения из области отношения между его психологической шкалой для зрительно воспринимаемой скорости и объективной шкалой, выражающейся количеством миль в час. По всей вероятности, форма субъективной шкалы — первичный факт, а умение инспектора совершать «ошибку в оценке стимула» — лишь мера его способности компенсировать нелинейный характер его субъективной шкалы.

Кроме того, проблема количественной оценки стимула приобретает еще бóльшее значение, если ее рассматривать как включающую в себя проблему оценки таких стимулов, для которых не существует объективных мер, например таких неуловимых комплексов, какими являются черты человеческого характера. Когда мы используем одного человека в качестве «инструмента» для оценки качеств других людей, мы надеемся, что этот «инструмент» даст ошибку в количественной оценке стимула в 100 процентов и не скажет нам относительно самого «инструмента» больше, чем относительно «стимула». Эта надежда, как мы знаем, частично несбыточна, но степень, в какой она может осуществиться, достаточно высока, чтобы методику сопоставления шкал причислить к разряду обязательных для некоторых отраслей психологии (ср. Гилфорд, 1936, гл. 9). На первый взгляд кажется, что существует мало общего между определением величины скорости движущейся по шоссе машины и оценкой такого признака, как властность характера, но если существуют некоторые общие принципы, которым подчиняется оценивание объективных качеств вещей, то они должны прилагаться к случаям как первого, так и второго рода.

Однако мы зашли слишком далеко в область умозрения. Вернемся к проблемам точности.

МЕТОДЫ ПСИХОФИЗИКИ

Поскольку мы уже охарактеризовали семь основных проблем психофизики, нам кажется своевременным перейти к рассмотрению вопросов, касающихся методов их решения. Однако мы не уделяем этим вопросам много места, так как методы обладают свойством быть скучными. Кроме того, предписывание метода исследования антинаучно в той же мере, в какой научный метод восприимчив к новому. Когда в психофизике изобретаются новые, более совершенные методы, психологи используют их независимо от того, имеются ли исторические прецеденты или нет.

О некоторых психофизических методах мы спорадически упоминали в ходе предшествующего изложения. Здесь мы постараемся рассмотреть их роль более подробно и полно, однако и это рассмотрение отнюдь не будет исчерпывающим. Полное перечисление методов может потребоваться лишь в очень редких случаях, так как в любой метод, изобретенный для решения какой-либо одной проблемы, оказывается необходимым внести изменения, если он применяется для решения других проблем. Три из перечисляемых ниже методов известны под весьма «почетным» названием «классических» (в табл. 7 они обозначены номерами 1, 2 и 4), но нет никаких оснований полагать, что эти или какие-либо другие известные методы лучше или хуже тех, которые могут быть изобретены гением завтрашнего дня.

Доводом в пользу традиционного акцентирования значения метода в психофизике является то достаточно простое обстоятельство, что ответы организмов изменяются от одного момента времени к другому. Вынужденные делать выборку во времени среди неустойчивых процессов, мы оказываемся отданными на милость статистическим операциям всякий раз, когда стремимся прийти к определенному заключению. Это чрезвычайно трудное дело. И для того чтобы сделать положение несколько менее безнадежным, психофизики разработали хитроумные

Таблица 7

Некоторые методы психофизики

Метод	Краткая характеристика	Обычный статистический показатель	Пробелы, к которым данный метод более всего приложим
1. Корректирование (на основе средней ошибки)	Наблюдатель корректирует величину стимула до тех пор, пока она не станет субъективно равной величине стимула, принятого за критерий, или не окажется в некотором заданном отношении с ним	Среднее от результатов опытов (средняя ошибка опытов является мерой точности)	Абсолютный порог Равенство Равные интервалы Равные отношения
2. Минимальное изменение (пределы)	Экспериментатор изменяет величину стимула в различных направлениях. Наблюдатель сообщает, каково отношение воспринятого им стимула к стимулу, принятому за критерий	Среднее значение величины стимула в переходной точке оценки наблюдателя	Все пороги Равенство
3. Попарное сравнение	Стимулы предъявляются попарно. Каждый стимул сопоставлен попарно с каждым другим стимулом. Наблюдатель указывает, какой стимул в каждой паре больше в отношении данного свойства	Соотношение оценок, указывающих, что один из стимулов больше другого (эти соотношения иногда переводят в величины на шкале, исходя из допущения о нормальном распределении оценок)	Порядок Равные интервалы (при допущении о нормальном распределении)
4. Метод постоянных стимулов	Несколько произвольно выбранных сравниваемых стимулов попарно сопоставляются с фиксированным образцом. Наблюдатель указывает, является ли каждый из сравниваемых стимулов больше или меньше, чем образец (частный случай попарного сравнения)	Величина разностного порога, равная интервалу величины стимула между точками, соответствующими 50 и 75% в отношении психометрической функции	Все пороги Равенство Равные интервалы Равные отношения
5. Квантовый метод	Различные фиксированные приращения прибавляются к образцу, так что между ними нет никакого временного интервала. Каждое приращение дается последовательно несколько раз. Наблюдатель указывает, воспринимает ли он возрастание величины стимула	Величина сенсорного кванта, равная расстоянию между двумя точками, ограничивающими наклонный отрезок ломано-линейной психометрической функции	Разностные пороги
6. Метод качественного упорядочения	В группе стимулов, предъявляемых одновременно, наблюдатель указывает воспринятый им ранговый порядок	Средний, или медианный ранг, устанавливаемый наблюдателями	Порядок
7. Использование шкалы для количественной оценки (единичного стимула)	Каждому из ряда стимулов дается «абсолютная» оценка в значениях некоторого качества, оценка может быть выражена как с помощью чисел, так и описательно	Средняя, или медианная, оценка, даваемая наблюдателями	Порядок Равные интервалы Количественная оценка стимулов

меры, с помощью которых они стремятся «преодолеть» непостоянство этих неуловимых процессов.

Семь из этих методов перечислены в табл. 7. Выбор именно этих семи методов совершенно произволен, и мы могли бы указать еще и многие другие методы. Но приведенные здесь методы представляют собой главные «виды», по отношению к которым большинство остальных являются лишь их вариантами. Более подробное рассмотрение этих методов, за исключением пятого метода, см. в книге Гилфорда; что же касается пятого метода, то см. работу Стивенса, Моргана и Фолькмана.

Последняя колонка табл. 7 показывает, что для решения каждой данной проблемы можно использовать различные методы. Вообще говоря, эмпирическая природа стимула и тот способ, с помощью которого с ним можно обращаться, определяют выбор метода, но при этом могут сыграть свою роль также и другие соображения. Так, справедливо полагают, что из двух методик, среди которых приходится выбирать, лучшей является та, которая ведет к цели более прямым путем.

В настоящее время все психофизические методы дают распределение отметок данных, на основании которых может быть получена мера локализации (иногда по недоразумению неправильно называемая «центральной тенденцией»), а также мера дисперсии. Применяться могут как одна, так и другая мера, а также обе вместе, но при прочих равных условиях для применения меры локализации существуют более прочные реальные основания. Поэтому, по-видимому, вполне оправдано мнение, что лучшим методом, к которому можно прибегнуть в каком-либо данном случае, является такой, который дает локализацию ответов наблюдателя в отношении изучаемого аспекта или свойства. В таком случае мера рассеивания может быть использована с целью установления точности оценки наблюдателя. Мы поступаем в общем правильно, если, имея возможность произвести измерения прямым путем, стараемся обойтись без косвенных измерений.

Достаточно одного примера, чтобы проиллюстрировать этот принцип. Метод корректирования, позволяющий наблюдателю непосредственно придать величине стимула то значение, которое удовлетворяет его задаче, является самым подходящим методом при определении эквивалентов. Но при изучении разностных порогов этот метод уже не столь удобен, так как он вынуждает нас оценивать порог с помощью некоторой произвольной меры дисперсии.

Этот критерий непосредственности отнюдь не является, однако, единственным руководящим принципом при решении интересующего нас вопроса. Практические и теоретические соображения, переплетаясь, определяют наш выбор метода, и характер их взаимодействия настолько сложен и запутан, что нет смысла пытаться его здесь раскрыть. Один пример, иллюстрирующий проблему метода в ее приложении к гипотезе «нервного кванта», был уже рассмотрен выше. Обсуждение вопроса о различии между средними едва заметными различиями, установленными с помощью метода минимальных изменений, и средними едва заметными различиями, полученными в качестве «вариационных индексов», исходя из дисперсии оценок, см. работы Хоулвея и Пратта.

ВЕРОЯТНОСТЬ

В предшествующих разделах понятие вероятности встречалось лишь в скрытой форме. Вся надстройка, образованная статистикой, имеет своим основанием теорию вероятностей, а без статистики измерения в психологии были бы почти невозможны. В действительности проблема квантификации в большинстве биологических наук имеет две главные стороны: измерение и выборку. Проблема же выборки является одним из аспектов вероятности.

Теперь все говорят о вероятности, однако никто еще не дал ей такого объяснения, которое бы удовлетворило каждого[1]. Здесь, конечно, не место пытаться делать это, да и автор не считает себя призванным внести ясность в споры, развернувшиеся в этой области, но есть два вопроса, которые все же следует здесь рассмотреть, — это позволит нам извлечь необходимые уроки из анализа истории математики и теории знаков (синтактики, семантики и прагматики). Первый из этих вопросов касается значения слова «вероятность», второй — формально-эмпирической дихотомии.

Ознакомиться с существом теории вероятности в ее современной развитой форме читатель может лишь при изучении специальных математических работ. Начиная ее изучение, можно использовать подходящую для этой цели книгу Уилкса. А чтобы читатель мог быть в курсе новейших постановок вопроса и интерпретаций основных проблем теории вероятностей, произведших фурор среди философов, мы порекомендуем ему обратиться к «Journal of Philosophy and Phenomenological Research». Этот журнал в своем отделе «Симпозиум по теории вероятностей» публикует начиная с 1945 года дискуссионные статьи целой плеяды видных ученых. Те два пункта, которые мы здесь рассматриваем, по-видимому, помогут читателю встать на правильный путь при анализе работ этого симпозиума.

Прежде всего существует семантическая проблема: к какого рода явлениям приложимо слово «вероятность»? Учитывая большое число прецедентов для многих и различных семантических правил употребления терминов, мы можем, поступая вполне законным образом, по крайней мере с теоретической точки зрения, использовать различные слова или же, как это иногда делают, добавить к слову «вероятность» индексы.

Так, можно определить вероятность$_1$ как степень нашей уверенности, на основе которой люди обычно держат пари. Это психологическое или субъективное чувство вероятности знакомо каждому, кто делает предположения о событии, которое еще не наступило.

Вероятность$_2$, допустим, выражает степень подтверждения выводного предложения или гипотезы, то есть вероятность того, что некоторое эмпирическое предложение истинно в операциональном смысле. Это как раз и есть то понятие, ради которого Карнап стремится развить индуктивную логику (см. К а р н а п, 1947).

Термин вероятность$_3$ может выражать априорное понятие вероятности, то есть вероятность, выведенную из «принципа неопределенности», согласно которому при отсутствии средств произвести выбор среди нескольких взаимно исключающих событий эти события следует рассматривать как равновероятные. К использованию именно этого принципа мы прибегаем, когда, например, приписываем вероятность, равную $^1/_6$ такого события, как выпадание брошенной на плоскость симметричной игральной кости данной гранью вверх.

Наконец, вероятность$_4$ может выражать понятие, употребляемое в частотной теории вероятности, согласно которой вероятность некото-

[1] Однажды Рассел в одной из своих лекций сказал, что «вероятность является наиболее важным понятием в современной науке, особенно постольку, поскольку никто не имеет ни малейшего представления, что оно означает» (см. Б е л л, 1945, стр. 587).

рого события представляет собой относительную частоту его наступления при очень большом числе испытаний. Именно это понятие вероятности лежит в основе большей части статистических исследований. И правильно утверждают, что вероятность$_4$ есть операциональная проверка вероятности$_3$. Если, не зная одного, мы ничего не можем узнать о другом, то, быть может, эти понятия имеют одно и то же содержание [1].

Таковы четыре возможных вида вероятности. Существуют, правда, еще и другие ее виды, но приведенных здесь вполне достаточно, чтобы оценить различия тех понятий, к которым прилагается один и тот же термин «вероятность». Мы охарактеризовали, таким образом, четыре семантических правила, устанавливающих связь между этим термином и тем или иным аспектом эмпирического мира. Вполне естественно поэтому, что не существует единой теории вероятности: этих теорий столько, сколько значений имеет термин «вероятность».

Второй вопрос, который мы хотели бы здесь рассмотреть, касается главным образом двух последних из этих четырех видов вероятности, поскольку именно для них созданы и детально разработаны модели математической вероятности и именно с ними мы имеем дело в статистике.

Преодоление путаницы в вопросе о природе статистической вероятности (если только это действительно преодоление путаницы) заключается, «вероятно», в том, чтобы строго следовать формалистической концепции математики. Эта концепция заставляет нас помнить о необходимости неуклонно проводить различие между формальной системой, которую мы можем использовать в качестве модели, и эмпирической реальностью, для которой модель может служить в качестве более или менее изоморфной ей карты. При обычном математическом исследовании проблемы весьма нелегко бывает последовательно соблюдать это требование. Еще труднее добиться этого при обсуждении вопросов теории вероятности. Но самую грубую ошибку мы совершаем тогда, когда судим о *необходимости* физических событий на основании отношений внутри *математической модели* вероятности при рассмотрении математического ожидания. При определенных эмпирических условиях данная математическая модель оказывается «подходящей» для определенной совокупности эмпирических событий, но полный изоморфизм, то есть совпадение «точка в точку», достигается весьма редко.

Записи, производившиеся в течение многих лет в казино Монте-Карло, свидетельствуют о замечательном совпадении свойств частоты распределений выигрышных номеров на колесах рулетки и предсказаний комбинаторного анализа так называемых законов вероятности. Но даже здесь соответствие между моделью и реальностью оказывается далеко не полным. Говорят, что один английский инженер терпеливо сводил в таблицы тысячи выигрышных номеров для каждого колеса в отдельности и затем привел в смятение владельцев этого предприятия, взяв большую серию выигрышей. В отчаянии владельцы казино вынуждены были произвести взаимную замену частей различных колес, для того чтобы, так сказать, испортить ему игру. Эта мера предосторожности постоянно применяется и по сей день. И, по всей вероятности, именно она дает возможность тем «изобретателям», которые еще продолжают выдумывать различные системы «правил игры», убедиться в тщетности своих попыток.

[1] По вопросу о современной частотной теории вероятности см. Рейхенбах, 1949.

Имея колесо рулетки «механически совершенное», то есть без каких-либо физических неправильностей, мы можем получить на нем *неупорядоченный* ряд номеров, соответствующий математическому ожиданию, причем от нас требуется только одно: чтобы движения нашей руки, бросающей шарик, были совершенно неупорядоченными. По-видимому, это и делает опытный банкомет. Точно таким же путем мы получаем количество выпадений, скажем, лицевой стороны монеты, предсказываемой по формуле разложения бинома, при условии, что мы производим бросание монеты таким образом, что падение ее той или другой стороной действительно случайно. Но в чисто математической формуле разложения бинома не содержится ничего, что определяло бы поведение монеты. И действительно, не составило бы большого труда построить механический аппарат, который подбрасывал бы монету таким образом, что в результате она почти всегда падала, например, лицевой стороной вверх.

Наша склонность смешивать формальные вычисления вероятности с эмпирическими свойствами определенных видов событий отчасти определяется тем, что, подобно большинству остальных проблем математики, эти формальные вычисления исторически берут свое начало в эмпирических проблемах (ср. Белл, 1937, стр. 86). Паскаль и Ферма первыми предприняли попытку ответить на вопросы, мучившие профессиональных игроков, и с тех пор мы никогда полностью не отделяли друг от друга эмпирический и формальный аспекты этой проблемы.

Затруднение обычно начинается уже с первой страницы той главы в университетском учебнике математики, где излагается вопрос о вероятности. Должным образом указывается, что вероятность p появления некоторого *события* есть отношение числа способов, которые могут привести к благоприятному исходу, к общему числу $s+f$ способов, которыми оно может произойти.

Это дает нам формулу

$$p=\frac{s}{s+f}.$$

Пока все идет хорошо, поскольку слово «событие» не определено (как это и полагается для чисто математического утверждения), а то, что мы имеем, представляет собой формулу, которая истинна по определению. Однако в том же параграфе появление события отождествляется с одной из граней «беспристрастной» игральной кости, или же с одной из сторон симметричной монеты, или же с белым шаром в мешке, в котором имеется еще и некоторое количество черных шаров. После этого лишь в редких случаях можно определить, говорит ли автор о математической операции или же о реальных действиях с реальной монетой. У читателя создается даже впечатление, что вообще можно производить *проверку* математической модели путем эмпирических действий, подобно тому, как древние некогда считали, что они могут проверять положения арифметики.

Если на основании истории математики можно сделать некоторые выводы, то они прежде всего касаются того факта, что все, что мы вообще можем проверить, — это только степень изоморфизма формальной модели (в данном случае это вычисление вероятности) и некоторой особой совокупности эмпирических событий. То, что степень изоморфизма часто оказывается высокой, есть счастливое обстоятельство, поскольку оно позволяет нам предсказать и поведение молекул, и смертность населения, и число голосов на выборах. Но существование этого изоморфизма свидетельствует лишь о том, что нам подвезло; оно, конечно, ничего не доказывает относительно существования какой-либо присущей вещам необходимости; наше понимание многообразия особых форм такой необходимости также не может гарантировать, что какая-либо данная формальная модель окажется соответствующей событиям, которые будут иметь место.

Рассмотрим в качестве примера формальной системы математическую модель, предложенную Мизесом для частотной теории вероятности. В английском издании своей книги [см. библиографию] Мизес не всегда отчетливо приводит различие между формальным и эмпирическим, но некоторые его устные высказывания приводят нас к заключению, что он это различие признает. Главным понятием предложенной Мизесом формальной системы является понятие «коллектив», который он определяет с помощью двух постулатов. Согласно первому из них, отношение числа элементов одного какого-нибудь рода к их общему числу в «коллективе» стремится к некоторому пределу, если их число стремится к бесконечности; согласно второму, всякое «выделение по месту» (выделение части элементов в соответствии с любым фиксированным правилом) имеет своим результатом новый «коллектив», имеющий тот же самый предел [см. Мизес, русск. перев., 1930, стр. 37]. Второй постулат Мизеса равнозначен следующей формулировке: по определению нельзя вывести такого «правила игры», которое гарантировало бы успех, если мы имеем дело с истинным «коллективом». На основе этих двух постулатов производится формальный подсчет, и, как это всегда бывает, вопрос о том, найдется ли такая физическая система, которая удовлетворяет этим постулатам, должен решаться путем эмпирической проверки. Числа на рулетке в приведенном выше примере приближаются к «коллективу» (о чем свидетельствует постоянная платежеспособность князя Монако). Мизес на протяжении нескольких страниц излагает некоторые другие конкретные случаи, при которых его вычисление «коллективов» оказывается достаточным для статического анализа природных явлений.

В данной связи интересно обратить внимание на то, что понимает Фехнер, как психофизик, под тем, что Мизес назвал полезным понятием «Kollectivgegenstand» [1] (см. Мизес, 1939, стр. 98 [русск. перев. 1930, стр. 15—16]). Однако Фехнер не предпринял дальнейших шагов, чтобы развить теорию вероятностей на основе этого понятия «конечного коллектива». Вместо этого он развил (в работе, которая уже после его смерти издана отдельной книгой) свою теорию конечных популяций (Kollectivmasslehre), которая непосредственно связана с частотной теорией вероятности и, по признанию Мизеса, явилась «стимулом» для его собственных изысканий (Мизес, стр. 123). В фехнеровской трактовке «коллектива» отсутствует понятие «неупорядоченности» — понятие, покрываемое вторым постулатом Мизеса.

Одно из достоинств частотной теории вероятности заключается в содержащемся в ней прямом указании на то, что́ именно является первичным: свойства «коллектива» или вероятность события. Понятие «коллектив» первично, а события имеют ту или иную вероятность постольку, поскольку они принадлежат к некоторым «коллективам». Таким образом, приписывание вероятности единичному событию представляет собой либо бессмысленную процедуру, либо замаскированное, косвенное

[1] Термин «Kollectivgegenstand» («коллективный предмет») был введен Фехнером. — *Прим. ред.*

признание того, что данное событие принадлежит к некоторому особому «коллективу».

Из этой концепции вероятности следует, что одной из первейших задач математической статистики является выяснение того, образует ли данная совокупность статистических данных «коллектив» или же нет. Если она не образует «коллектива», то производимое по Мизесу формальное вычисление вероятности не представляет собой подходящей для нее модели. Но то качество вероятности, которое мешает нам в осуществлении наших целей и дезориентирует нас, состоит в следующем: не существует такого *конечного* множества данных, относительно которого мы могли бы быть абсолютно уверены в том, является ли данная модель соответствующей ему или нет. Строго говоря, над преодолением этой трудности и бьются при каждом научном исследовании, но при решении проблем, связанных с вероятностью, она преследует нас с ужасающим постоянством.

МЕРЫ И ИНДИКАНТЫ

Еще один, заключительный пункт, и мы завершим наше изложение. Хотя психологи посвящают свой энтузиазм в значительной степени измерению психологических особенностей людей, не менее значительная доля этого энтузиазма растрачивается на попытки определить величину различных аспектов поведения с помощью того, что можно назвать *индикантами*. Эти индиканты представляют собой *результаты* или *корреляты*, связываемые с психологическими особенностями посредством некоторых *неизвестных* законов. Подобное явление неизбежно на современной стадии развития нашей науки, и в этом нет ничего зазорного. Мы знаем о психических феноменах только по вызываемым ими результатам, и поэтому измерение этих результатов есть первый трудный шаг на пути к постижению.

Завершающая фаза исследования — это такое измерение, которое нам удастся произвести, лишь устанавливая отношение между нашими случайными индикантами и присущими предмету исследования собственными признаками.

Тем временем мы стараемся овладеть стоящими перед нами проблемами, используя то, что имеется в нашем распоряжении. Мы подсчитываем число хлебных шариков, припрятанных крысой про запас, с тем чтобы определить у нее величину побуждения делать запасы. Мы подсчитываем число испытаний, необходимых индивиду для научения решать некоторую задачу, и используем это число в качестве показателя его способности. Мы измеряем изменения сопротивления кожи и рассматриваем их как индиканты эмоции. Короче говоря, как это будет показано в последующих разделах данной книги, мы гораздо чаще вынуждены прибегать к измерению индикантов, чем к изобретению шкал для непосредственной оценки величины физиологических и психологических явлений, или, как их иногда называют, «наблюдаемых переменных».

В отдельных случаях измерения одного лишь индиканта может оказаться достаточным для решения поставленной задачи; например, при измерении и оценке способности рабочего на основе производительности его труда достаточно изучить соотношение между продукцией, выработанной им, и продукцией, выработанной его соседом. Значительно чаще мы предпочтем измерять его способность, умственную одаренность, энергичность, эмоциональное состояние, голод и т. п. с помощью шкалы для изучаемого свойства, чем с помощью результатов, связь которых с этим свойством весьма сомнительна.

Таким образом, различие между индикантом и мерой состоит в следующем: индикант — это предполагаемый результат или коррелят, стоящий в каком-то неизвестном (но обычно в монотонном) отношении к изучаемому феномену, в то время как мерой является оцененная по некоторой шкале величина самого феномена. Индиканты имеют преимущество удобства, меры — преимущество вескости. Мы стремимся применять меры, но часто вынуждены удовлетвориться меньшим.

Это различие между мерами и индикантами исчезает, конечно, как только мы узнаем количественное отношение между индикантом и исследуемым объектом, ибо в таком случае этот индикант может быть градуирован и использован для измерения данного явления. Мы измеряем электрический ток с помощью градуированного индиканта, состоящего из проволочной спирали, подвешенной на пружине в магнитном поле. Мы измеряем воспринимаемую высоту тона при помощи измерения частоты, после того как была создана шкала, устанавливающая отношение высоты тона в мелах к частоте в герцах. Чем более зрелой становится наука, тем шире она использует *градуированные* индиканты.

БИБЛИОГРАФИЯ

Beebe-Center J. G. Standards for use of the gust scale, «J. Psychol.», 1949, 28, 411—419.

Békésy G., Über das Fechner'sche Gesetz und seine Bedeutung für die Theorie der akustischen Beobachtungsfehler und die Theorie des Hörens, «Ann. Physik», 1930, **7**, 329—359.

Bell E. T., Men of mathematics, New York, Simon and Schuster, 1937.

Bell E. T., The development of mathematics, 2nd ed., New York, MacGraw-Hill, 1945.

Birkhoff G. and S. MacLane, A survey of modern algebra, New York, Macmillan, 1941.

Boring E. G., Sensation and perception in the history of experimental psychology, New York, Appleton-Century-Crofts, 1942.

Bridgman P. W., The logic of modern physics, New York, Macmillan, 1928.

Bridgman P. W., Dimensional analysis, 2nd ed., New Haven, Yale University Press, 1931 [русск. перев.: Бриджмен П. В., Анализ размерностей, Гос. техн.-теоретич. изд-во, Л.—М., 1934].

Bruner J. S. and L. Postman, Symbolic value as an organizing factor in perception, «J. soc. Psychol.», 1948, **27**, 203—208.

Campbell N. R., Symposium: Measurement and its importance for philosophy, Aristotelian Sosiety, Suppl., vol. 17, London, Harrison, 1938.

Campbell N. R. (и др.), Final report, «Advanc. Sci.», 1940, No 2, 331—349.

Carnap R., Introduction to semantics, Cambridge, Harvard University Press, 1942.

Carnap R., Probability as a guide in life, «J. Phil.», 1947, **44**, 141—148.

Courant R. and Robbins H., What is mathematics?[1] New York Oxford University Press, 1941 [русск. перев.: Курант Р. и Роббинс Г., Что такое математика? Гос. техн.-теоретич. изд-во, М.—Л., 1947].

Crocker F. C. and Henderson L. F., Analysis and classification of odors, «Amer. Perfum.», 1927, **22**, 325—327.

Dantzig T., Number: The language of science, New York, Macmillan, 1939.

Guilford J. P., Psychometric methods, New York, McGraw-Hill, 1936.

Gulliksen H., Paired comparisons and the logic of measurement, «Psychol. Rev.», 1946, **53**, 199—213.

Hanes R. M., The construction of subjective brightness scales from fractionation data: A validation, «J. exp. Psychol.», 1949, **39**, 719—728.

Hardy J. D., Wolff H. G. and Goodell H., *Studies on pain: an investigation of*

[1] Популярный очерк. Допускается неправильное освещение работ некоторых советских математиков. — *Прим. ред.*

some quantitative aspects of the dol scale of pain intensity, «J. clin. Invest.», 1948, **27**, 380—386.

Harkin D., Fundamental mathematics, New York, Prentice-Hall, 1941.

Harper R. S. and Stevens S. S., A psychological scale of weight and a formula for its derivation, «Amer. J. Psychol.», 1948, **61**, 343—351.

Herget C. M., Granath L. P. and Hardy J. D., Thermal sensation and discriminations in relation to intensity of stimulus, «Amer. J. Physiol», 1941, **134**, 645—655.

Hogben L., Mathematics for the million, 2nd ed., New York, Norton, 1940.

Holway A. H. and Pratt C. C., The Weberratio for intensitive discrimination, «Psychol. Rev.», 1936, **43**, 322—340.

Howes D. H., The loudness of multicomponent tones, «Amer. J. Psychol.», 1950, **63**, 1—30.

Huntington E. V., The fundamental propositions of algebra, см. в книге: J. W. A. Young (Ed.), Monographs on modern mathematics, New York, Longmans, Green, 1911; переиздано Galois Institute Press, Brooklyn, 1941.

Klein F., Elementary mathematics from an advanced standpoint, New York, Dover, 1945 [перев. 3-го немецкого издания (1924); см. также русск. перев.: Клейн Ф., Элементарная математика с точки зрения высшей, т. 1—2, М.—Л., 1934—1935].

Lewis D., Quantitative methods in psychology, Iowa City, 1948.

Lewis D. R., Psychological scales of taste, «J. Psychol.», 1948, **26**, 437—446.

Miller G. A., Sensitivity to changes in the intensity of white noise and its relation to masking and loudness, «J. acoust. Soc. Amer.», 1947, **19**, 609—619.

Miller G. A. and Garner W. R., Effect of random presentation on the psychometric function: implications for a quantal theory of discrimination, «Amer. J. Psychol.», 1944, **57**, 451—467.

Mises R., Probability, statistics and truth, New York, Macmillan, 1939 [русск. перев.: Мизес Р., Вероятность и статистика, Госиздат, М.—Л., 1930].

Morris C. W., Foundations of the theory of signs, «Int. Encycl. unif. Sci.», 1938, No **1**, 63—75.

Mosier C. I., Psychophysics and mental test theory: Fundamental postulates and elementary theorems, «Psychol. Rev.», 1940, **47**, 355—366.

Mosier C. S. I., Psychophysics and mental test theory, The constant process, «Psychol. Rev.», 1941, **48**, 235—249.

Neumann J. and Morgenstern O., Theory of games and economic behavior, 2nd ed., Princeton, Princeton University Press, 1947.

Ore O., Number theory and its history, New York, McGraw-Hill, 1948.

Poincaré H., The foundations of science, New York, Science Press, 1913 [сборник английских переводов ряда работ Анри Пуанкаре; в русск. перев.: Пуанкаре А., Наука и гипотеза, М., 1904; его же, Ценность науки, М., 1906; его же, Наука и метод, СПБ, 1910].

Quine W. V. O., Mathematical logic, Cambridge, Harvard University Press, 1947.

Reese T. W., The application of the theory of physical measurement to the measurement of psychological magnitudes, with three experimental examples, «Psychol. Monogr.», 1943, **55**, No 3, 1—88.

Reichenbach H., Experience and prediction, Chicago, University of Chicago Press, 1938.

Reichenbach H., Elements of symbolic logic, New York, Macmillan, 1947.

Reichenbach H., The theory of probability, 2nd ed., Berkeley, University of California Press, 1949.

Riess Anita, Number readiness in research, New York, Scott, Foresman, 1947.

Russel B., Introduction to mathematical philosophy, 2nd ed., New York, Macmillan, 1920.

Russell B., The principles of mathematics, 2nd ed., New York, Norton, 1937.

Sheldon W. H., Stevens S. S. and Tucker W. B., The varieties of human physique, New York, Harper, 1940.

Stevens S. S., The relation of saturation to the size of the retinal image, «Amer. J. Psychol.», 1934, **46**, 70—79.

Stevens S. S., Psychology and the science of science, «Psychol. Bull.», 1939a, **36**, 221—263.

Stevens S. S., On the problem of scales for the measurement of psychological magnitudes, «J. unif. Sci.», 1939b, **9**, 94—99.

Stevens S. S., On the theory of scales of measurement, «Science», 1946, **103**, 677—680.

Stevens S. S., Sensation and psychological measurement, см. в книге: E. G. Boring, Langfeld H. S. and Weld H. P. (Eds.), Foundations of Psychology, New York, Wiley, 1948, Ch. 11.

Stevens S. S. and H. Davis, Hearing: Its psychology and physiology, New York, Wiley, 1938.
Stevens S. S., Morgan C. T. and Volkmann J., Theory of the neural quantum in the discrimination of loudness and pitch, «Amer. J. Psychol.», 1941, **54**, 315—335.
Stevens S. S. and Volkmann J., The quantum of sensory discrimination, «Science», 1940a, **92**, 583—585.
Stevens S. S. and Volkmann J., The relation of pitch to frequency: A revised scale, «Amer. J. Psychol.», 1940b, **53**, 329—353.
Tarski A., Introduction to logic and to the methology of deductive sciences, New York, Oxford University Press, 1941 [русск. перев.: Тарский А., Введение в логику и методологию дедуктивных наук, Изд-во иностранной литературы, М., 1948].
Taves E. H., Two mechanisms for the perception of visual numerousness, «Arch. Psychol.», 1941, **37**, No 265.
Thompson D'Arcy W., On growth and form, New York, Macmillan, 1942.
Thurstone L. L., Multiple factor analysis, Chicago, Chicago University Press, 1947.
Thurstone L. L., Psychophysical methods, см. в книге: Andrews T. G. (Ed.), Methods of Psychology, New York, Wiley, 1948, Ch. 5.
Tingley E. M., Base eight arithmetic and money, «Sch. Sci. Math.», June, 1940.
Titchener E. B., The psychophysics of climate, «Amer. J. Psychol.», 1909, **20**, 1—14.
Weyl H., Philosophy of mathematics and natural science, Princeton, Princeton University Press, 1949 [переработанное и дополненное издание на основе перевода Олафа Хельмера; см. немецкий оригинал: Weyl H., Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, в книге «Handbuch der Philosophie», под ред. A. Baelmer, M. Schroter, вып. 4; см. также русск. перев. части немецкого издания: Вейль Г., О философии математики, Сборник работ, Гос. техн-теоретич. изд-во, М.—Л., 1934, см. разд. II, «Философия математики».
Wilks S. S., Mathematical statistics, Princeton, Princeton University Press, 1943.
Young J. W., Lectures on the fundamental concepts of algebra and geometry, New York, Macmillan, 1911.